UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

MARCONDES FREIBERGER

FLORIANÓPOLIS
JULHO, 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

MARCONDES FREIBERGER

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática – Habilitação em Licenciatura, do Departamento de Matemática, Cento de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Eliezer Batista

FLORIANÓPOLIS
JULHO, 2004.

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela banca examinadora designada pela portaria nº 42/ SGC / 04.

Profª. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Prof. Eliezer Batista

Orientador

Prof. José Luis Rosas Pinho

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva

Dedico este trabalho a Nelsi minha esposa e Tuâni minha filha a quem contribuíram de forma significante para o êxito desta conquista, pois foi elas quem estiveram sempre do meu lado nas horas difíceis, onde pensava que não poderia seguir, me impulsionavam e faziam acreditar que era possível.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a graça da vida;
Ao meu orientador Professor Eliezer, pela incomparável orientação;
A todo o corpo docente deste centro e funcionários que contribuíram direta ou indiretamente para esta conquista.
A todos os colegas e amigos que acreditaram e colaboraram para que esta conquista se realizasse.
E a todos os familiares que souberam entender as dificuldades e me ajudaram a seguir em frente

Sumário

Resumo	2
Introdução	3
1 Geometria do Compasso	6
1.1 Construções usando só o compasso	6
1.2 Solução dos problemas geométricos de construção aplicando só o compasso.	13
1.3 Inversão e suas propriedades fundamentais	15
1.4 Aplicação do método de inversão na geometria do compasso	19
2 Geometria da Régua	26
2.1 Construções só com uma régua	26
2.2 Construções por meio de uma régua se estão prefixadas duas retas paralelas.	27
2.3 Construções mediante uma régua, se é dado uma circunferência e seu centro.	30
Conclusão	40
Referências Bibliográficas	41

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de mostrar aos mais leigos em matemática que a mesma não é apenas feita de operações de adição e subtração, mas mostrar que existem diversas formas de abordagem, sendo que este trabalho enfoca uma das particularidades, extremamente importante que é a geometria construída com régua e compasso. Temos por objetivo apresentar as construções geométricas e suas demonstrações, usando para isso, toda a geometria euclidiana.

Mostraremos que com estas duas ferramentas tão simples e tão antigas somos capazes de construir toda a geometria. Relatamos fatos de matemáticos envolvidos com a geometria de construção com régua e compasso que começaram a pensar em fazer só com uma das ferramentas por vez, o que resultou na geometria só do compasso e em seguida a geometria da régua.

Mostraremos dois teoremas importantes com muitos exercícios e demonstrações os quais reforçarão o seu entendimento, com auxilio de figuras construídas no Soft `Cabri Geometrico´®.

Apresentaremos o trabalho de ilustres matemáticos que contribuíram de fundamental importância para esta teoria, Mohr, Mascheroni, A.Adler, Jacob Steiner, sendo que Mohr e Mascheroni nos seus teoremas afirmam que toda construção geométrica feita com régua e compasso é possível faze-la valendo-se só de um compasso. A.Adler aplicou a teoria de inversão para mostrar o mesmo resultado. Enquanto, Jacob Steiner diz que toda construção geométrica construída com régua e compasso é possível só com uma régua, valendo-se do compasso apenas uma vez para desenhar uma circunferência centrada, sendo este o principio da geometria projetiva.

Introdução

A Régua e o Compasso

A tradição de utilizar somente régua e compasso nas construções geométricas remonta à antiguidade grega, mais precisamente, à época da descoberta dos números irracionais por alguém da escola de Pitágoras. Incapaz de compreender e conviver com os incomensuráveis, a escola pitagórica, que pretendia fundamentar toda a ciência, inclusive a geometria, na aritmética entrou em irremediável crise. Era necessário encontrar novos caminhos. Inspirados por Platão, os matemáticos gregos procuravam inverter a situação tomando a geometria como fundamentação para a aritmética sendo assim levados a procurar uma base axiomática para a geometria. Essa busca foi grandemente influenciada pelas idéias filosóficas de Platão. Seu sistema filosófico foi erguido baseado na crença da existência de um mundo abstrato formado apenas por idéias e é nele que toda teoria cientifica, como é o caso da geometria, deve ser construída. Não temos, porém, segundo o filósofo, livre acesso a esse mundo da razão; na melhor das hipóteses, nossos órgãos sensoriais podem oferecer difusas imagens do que aí se encontra. Por outro lado, não podemos, sob pena de ter que renunciar à possibilidade de qualquer espécie de conhecimento, negar a existência no mundo das idéias de entidades tão simples e de concepção tão clara como a reta e a circunferência. Sendo a régua e o compasso a materialização neste mundo em que vivemos das idéias de reta e circunferência, devemos admitir que tudo que pudermos construir com eles terá direito à cidadania no mundo platônico das idéias. Assim as construções geométricas efetuadas com auxilio da régua e do compasso adquirem, para os antigos geômetras gregos, um caráter de teoremas de existência e daí sua importância. Nas construções com régua e compasso devemos perceber que o compasso é de certa forma, um instrumento mais nobre que a régua. Ele traça uma circunferência perfeita, enquanto que a régua depende da precisão de sua fabricação.

Compreendida a razão e assimilado o hábito de se fazer construções com régua e compasso, ocorre-nos naturalmente a pergunta:

Que tipos de construções podem ser feitas com apenas um desses instrumentos?

Existe um belo teorema que afirma que qualquer construção que pode ser realizada com régua e compasso também pode ser realizada apenas com o compasso.

Este teorema se deve a um matemático dinamarquês chamado Georg Mohr (1640-1697) e foi publicado em 1672, mas, aparentemente, ninguém deu importância na época.

Mais de um século depois, Lorenzo Mascheroni redescobriu esta pérola e publicou um livro sobre construções geométricas apenas com o compasso e então este tema passou a ser conhecido e apreciado.

A limitação tradicional é utilizada para construções geométricas só para o compasso e a régua remonta à antiguidade. A célebre geometria de Euclides (século III a.C) se fundou sobre as construções geométricas mediante o compasso e a régua.

Geômetra e poeta italiano do século XVlll, Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) nasceu em Castagneta na Itália, onde começou a estudar tarde formou-se padre**,** interessou-se pela geometria, foi indicado professor de matemática em Jovia, escreveu sobre física e cálculo propôs o sistema métrico, e publicou artigos sobre cálculo integral de Euler. Amigo de Napoleão, morreu em Paris em 1800. Fez a surpreendente descoberta que toda construção euclidiana podem ser feitas apenas com o compasso, sendo publicado no ano de 1797 na geometria do compasso de Mascheroni.

Georg Mohr (1640 – 1697) foi descoberto por acaso por um matemático dinamarquês J. Hjelmslev ao revirar as prateleiras de uma livraria em compenhague, encontrando o livro, Euclides Danicius publicado em 1672 por Georg Mohr, ao folhear o livro Hjelmslev verificou que continha a descoberta de Mascheroni, com uma demonstração que antecedia a publicação de Mascheroni em 125 anos.

Em 1890, surge o geômetra vienense August Adler (1863 –1923) que públicou uma nova demonstração dos resultados de Mascheroni fazendo uso da transformação de inversão.

Inspirando-se na descoberta de Mascheroni, o matemático francês Jean Victor Poncelet (1788 – 1867) foi quem deu inicio à geometria projetiva. Nasceu em Metz Alemanha em 1788. Estudou no liceu local e de 1807 a 1810, foi aluno da escola politécnica, em particular de Gaspar Monge (um matemático). Em 1812 como estudante da academia militar foi convocado para o exercito, serviu como tenente de engenharia na campanha fatal de Napoleão na Rússia, foi feito prisioneiro de guerra após ser libertado escreveu sobre mecânica, hidráulica, séries infinitas e geometria, morreu em 1867 com setenta e nove anos de idade. Iniciou as construções com apenas uma régua sendo que só com uma régua nem toda construção euclidiana é possível, sendo necessário usar circunferências que é seu teorema; foi concebido em 1822 e mais tarde, em 1833, desenvolvido plenamente pelo geômetra alemão Jacob Steiner (1796 – 1863), que desenvolveu muita das teorias inacabadas deixadas por Poncelet. Steiner é considerado um dos maiores talentos da geometria sintética que o mundo já conheceu. Nasceu na cidade de Utzensdorf em 1796 na Suiça , sendo que só aprendeu a escrever aos quatorze anos de idade.Aos dezessete anos foi indicado professor do renomado colégio Gewerbewkadem na Alemanha, em 1834 foi eleito membro da academia de ciências de Berlim, onde permaneceu até seus últimos dias, morrendo em 1863 com sessenta e sete anos.

Considerado o maior geômetra desde Apolônio, Steiner possuía um poder incrível para o tratamento sintético da geometria, escreveu tratados do mais alto padrão, dizem que detestava o método analítico, o qual considerava uma muleta para os espíritos menos dotados.

Existem registros afirmando que produzia nova geometria tão rápido que às vezes não tinha tempo de anotar suas demonstrações, contribuiu para estudo n-angulos espaciais, teoria das curvas e superfícies, roulletes e as vinte e sete retas de uma superfície de terceira ordem, abordou através da geometria sintética problemas de máximo e mínimo seu nome em muitos lugares da geometria como a solução e generalização de Steiner do problema de Malfati, as cadeias de Steiner, o prisma de Steiner e os pontos de Steiner da configuração do hexágono místico... [1,2,3,5]. São necessárias?

Compasso

Aparentemente a restrição do uso da régua originou-se por razões de ordem prática como a dificuldade de se obter réguas de boa qualidade. Em razão disso, desenhistas e construtores do inicio do renascimento passaram a utilizar, sempre que possível, o compasso em detrimento da régua.

Até 1928 supunha-se que Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800), tinha sido o primeiro a demonstrar que o uso da régua era dispensável nas construções geométricas.

Há muito se notou que o compasso é uma ferramenta mais precisa que a régua e que é possível fazer certas construções valendo-se só de um compasso e sem recorrer à régua. Por exemplo, dividir uma circunferência em seis partes iguais; traçar um ponto simétrico a um ponto dado respectivo a uma reta dada, etc. Isso sem prestar a atenção ao fato de que para traçar os círculos primitivos dos instrumentos astronômicos se usa como regra só um compasso.

No ano de 1797 o matemático italiano, professor da universidade em Pavia Lorenzo Mascheroni publico um grande trabalho" Geometria do compasso" que depois foi traduzido ao francês e alemão. Nesta obra se demonstrou a seguinte prposição:

Todos os problemas de construção que se resolvem com ajuda do compasso e da régua, podem ser resolvidos só com o compasso.

Em 1890 A.Adler demonstrou esta afirmação por um procedimento original com ajuda da inversão. Também propôs o método geral para resolver os problemas geométricos de construção por meio só de um compasso.

A parte da geometria na qual se estudam as construções geométricas realizadas mediante um compasso se chama geometria do compasso.

O grande matemático russo N.I. Lobachesvki na primeira metade do século XIX descobriu uma nova geometria que logo recebeu o nome de geometria não euclidiana ou geometria hiperbólica de Lobachevski.

A.S. Smogorzhevski, V.F. Rogachenko, K.K. Mokrischev e outros matemáticos em suas obras examinaram as construções no plano de Lobachevski sem ajuda da régua, além disso se demonstrou a possibilidade de realizar as construções análogas às de Mascheroni no plano euclidiano.

Régua

A ausência do compasso é uma restrição real e muito significativa. O estudo sistemático do que é possível fazer utilizando apenas a régua nos conduz à geometria projetiva, assunto de grande beleza e importância.

Em 1833 o geômetra suíço Jacob Steiner publicou sua obra "Construções geométricas realizadas com ajuda de uma linha reta e um circulo fixo" no qual examinou de modo mais completo as construções feitas com a régua. O resultado principal deste trabalho é possível expressar forma da seguinte proposição:

Cada problema de construção que tenha solução por meio do compasso e da régua, pode ser solucionado valendo-se só de uma régua, se no plano estiver o desenho de uma circunferência constante e seu centro.[5]

Capítulo I

Geometria do Compasso

1.1 Construção só com o compasso

Como é possível resolver os problemas geométricos de construção valendo-se somente de um compasso?

Iremos mostrar nesta parte do trabalho como é possível a construção matemática com apenas um compasso, fazendo suas demonstrações utilizando algumas propriedades da geometria elementar.

Ao usar só um compasso, não podemos, claro traçar uma linha reta contínua, mais adiante mostraremos que com apenas um compasso pode-se marcar um, dois, em geral qualquer número de pontos que se situem numa mesma reta.

O traçado de uma mesma reta não se assegura completamente pela teoria de "Mohr-Mascheroni". Na geometria de compasso uma linha ou um segmento, se determina por dois pontos e não precisa a ajuda de uma régua. A construção de uma linha reta se considera terminada no momento em que se encontram quaisquer dois dos seus pontos. Para fins demonstrativos, serão utilizadas linhas tracejadas, que, no entanto, não participam da construção.

Para um melhor entendimento e facilitar a escrita ao descrevemos circunferências, convencionamos que a primeira letra é sempre o centro e a segunda e terceira letra é o tamanho do raio, exemplo (A,BC) é uma circunferência de centro A e raio tamanho BC, quando as letras se repetem em vez de escrever (A, AB) , escreve-se (A,B) onde o centro é A e o raio AB.

Teorema 1 (**Morh-Mascheroni**): Todo ponto do plano obtido através de uma construção euclidiana pode ser obtido por uma construção utilizando apenas o compasso.

Lema 1: Sejam A, B, C, D pontos distintos do plano tais que as retas AB e CD são concorrentes em X. Nessas condições é possível obter-se o ponto X por uma construção utilizando-se apenas um compasso.

Lema 2: Seja C uma circunferência de centro O e raio r e A e B dois pontos do plano tais que a reta AB intercepta a circunferência C. É possível nessas condições determinar os pontos M e N de intersecção de C com a reta AB utilizando-se apenas de um compasso.

As demonstrações desses lemas aparecerão mais adiante.

Problema 1. Construir o ponto simétrico a um ponto dado C a uma reta dada AB.

Construção: Descreveremos as circunferências (A,C) e (B,C) na intersecção das circunferências obteremos o ponto C´ ponto procurado.

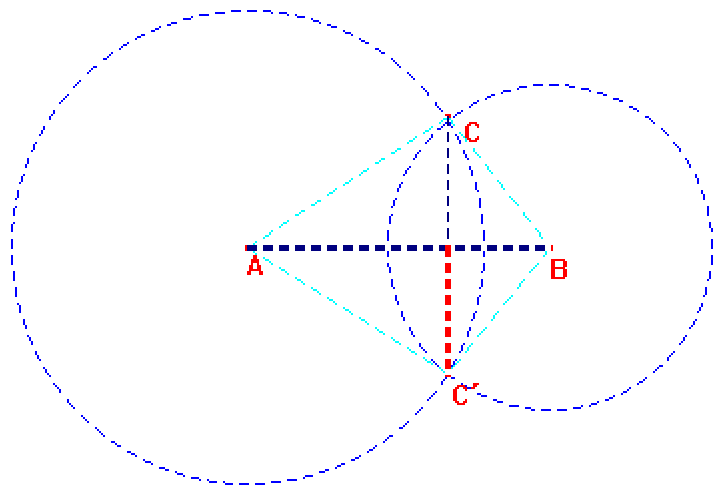


Figura 1. Partes simétricas de um ponto dado em relação a uma reta.

Demonstração:

Pela propriedade de (LLL) , Δ ACB $\cong$ Δ AC´B e portanto

CÂB $\cong$ C´ÂB , Δ ACC` é isósceles pois AC $\cong$ AC´. Seja D o ponto de intersecção de AB com CC´.AD é bissetriz de CÂC $\rightarrow$ AD é altura e mediana, logo:

$CC' \perp AB$, e CD ≡ C`D portanto C´ é simétrico a C.

Problema 2. Traçar um segmento 2, 3, 4 , em geral n vezes maior que o segmento dado AA_1 = R (onde n é um número natural qualquer).

Construção: Conservando a abertura do compasso invariável e igual a R, descreveremos a circunferência (A_1, R) (e determinamos ponto A_2 que é diametralmente oposto ao ponto A), para que tracemos as cordas AB = BC = CA_2 = R. O segmento AA_2 = 2R. Descrevemos logo a circunferência (A_2, R) que intersectara a circunferência (C,R) no ponto D. na intersecção das circunferências (D,R) e (A_2, R) obteremos o ponto A_3. O segmento AA_3 = 3R. etc. Ao realizar as construções indicadas n vezes. Troçamos o segmento AA_n = nR.

A validez de nossa construção se deduz do fato de que o compasso com abertura igual ao raio da circunferência divide-se em seis partes iguais.

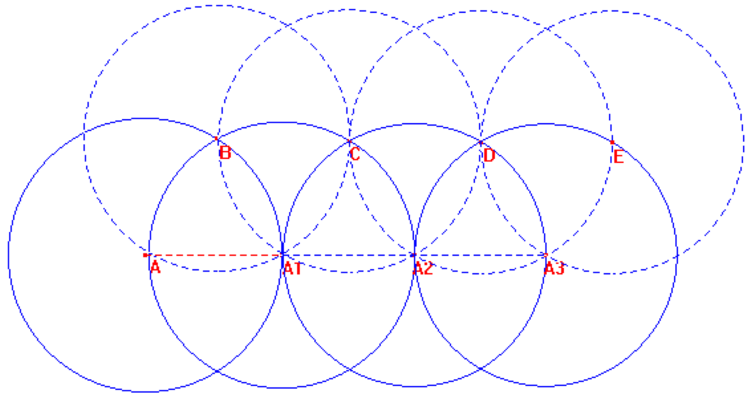


Figura 2. Segmento n vezes o segmento dado

Problema 3. Dado três segmentos de comprimento a, b, c encontrar um quarto segmento de comprimento d tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ denominado quarta proporcional.

Construção: Para c < 2a

De um ponto arbitrário O no plano, como centro, descrevemos duas circunferências concêntricas com raio a e b. Na circunferência (O,a) tracemos a corda AB = c e tomando um raio arbitrário descrevemos duas circunferências (A,r) e (B,r) que intersectarão a circunferência (O,b) nos pontos A_1 e B_1. O segmento A_1B_1 é tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{A_1B_1}$

Demonstração: Os triângulos ΔAOA_1 e ΔBOB_1 são congruentes pelo caso LLL

Pelo ângulo $A\hat{O}A_1 = B\hat{O}B_1$ o ângulo $A\hat{O}B \equiv A_1\hat{O}B_1$ e os triângulos isósceles ΔAOB e ΔA_1OB_1 são semelhantes, por conseguinte $\frac{a}{b} = \frac{c}{A_1B_1}$

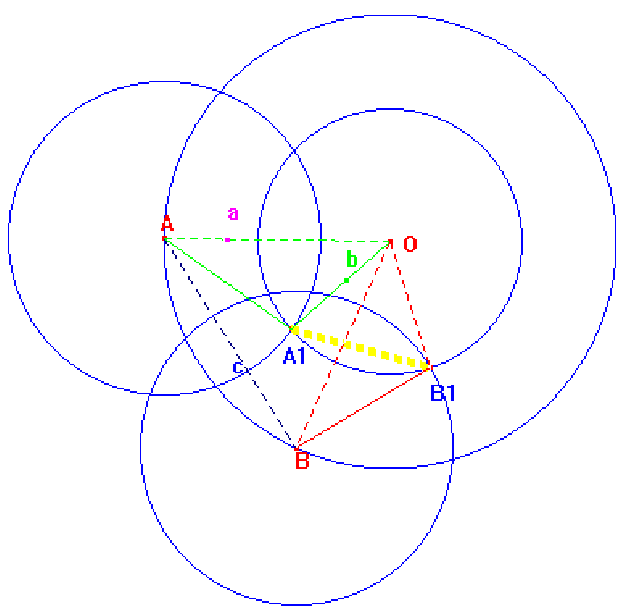


Figura 3. Construção da quarta e proporcional a três segmentos dados.

Caso C $\geq$ 2a

Tracemos um segmento de comprimento tal que c < 2na. Então utilizamos o caso anterior e traçamos um segmento de comprimento y tal que $\frac{na}{b} = \frac{c}{y}$.

O segmento de comprimento ny (problema 2) satisfará $\frac{a}{b} = \frac{c}{ny}$, que é a solução do problema.

Problema 4. Dividir um arco AB de circunferência pela metade.

Construção: Mais adiante mostraremos que se pode supor concedido o centro O da circunferência.

Supondo que AO = OB = r e AB = a, descrevemos as circunferências (O,a) (A,r), (B,r), na intersecção obtemos os pontos C e D, traçamos a circunferência (C,B) e (D,A) até seu encontro no ponto E. Se agora se traçam as circunferências (C,OE) e (D,OE) então em suas intersecção obteremos os pontos X e X_1.

O ponto X divide o arco AB pela metade e o ponto X_1 divide pela metade o arco que completa o arco primeiro até a circunferência total.

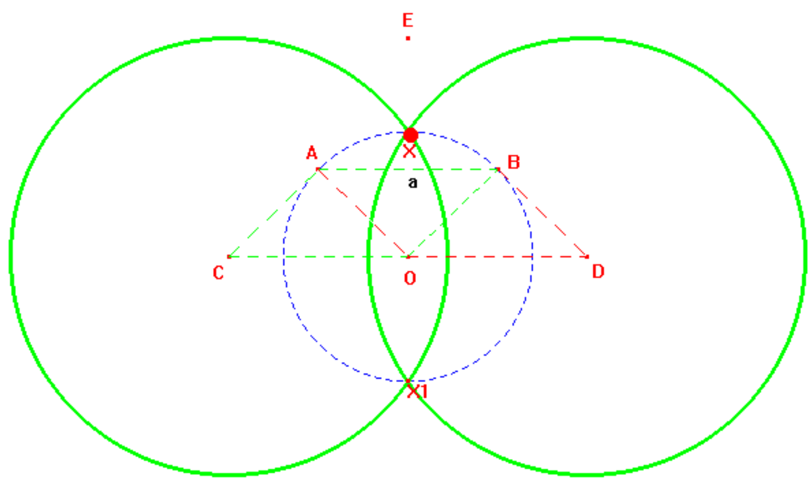


Figura 4. Achando o ponto médio do arco AB.

Demonstração: As figuras ABOC e ABDO são paralelogramos portanto os pontos C, O e D se acham em uma reta dos triângulos isósceles ΔCED e ΔCXD se deduz que CÔE = CÔX = 90º. Deste modo segmento OX e perpendicular a corda AB.

Por conseguinte, para demonstrar que o ponto X divide o arco AB pela metade, é suficiente demonstrar que o segmento OX = r.

Do paralelogramo ABOC se deduz que,

$OA^2 + BC^2 = 2OB^2 + 2AB^2$

$r^2 + BC^2 = 2r^2 + 2a^2$, por isto

$BC^2 = 2a^2 + r^2$

Do triângulo retângulo ΔCOE podemos escrever:

$CE^2 = BC^2 = OC^2 + OE^2$ donde $2a^2 + r^2 = a^2 + OE^2$

$OE^2 = a^2 + r^2$ por fim do triangulo retângulo ΔCOX obteremos

$OX = \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 + r^2 - a^2} = r$,cqd.[4].

Como vemos, na geometria do compasso é regra comum considerar a linha reta como traçado imediatamente depois de determinados quaisquer dos seus pontos.

Problema 5. Na reta definida pelo ponto A e B, obter R ou vários pontos.

Construção: Tomemos no plano fora da reta AB um ponto arbitrário C marquemos o ponto C_1 que é simétrico ao primeiro com um raio arbitrário descrevemos as circunferências (C, R) e (C_1, R) nas intersecções obteremos os pontos X e X_1 que se acham sobre a reta dada A B (traçando a magnitude do raio R pode encontrar quaisquer que sejam pontos da reta dada.

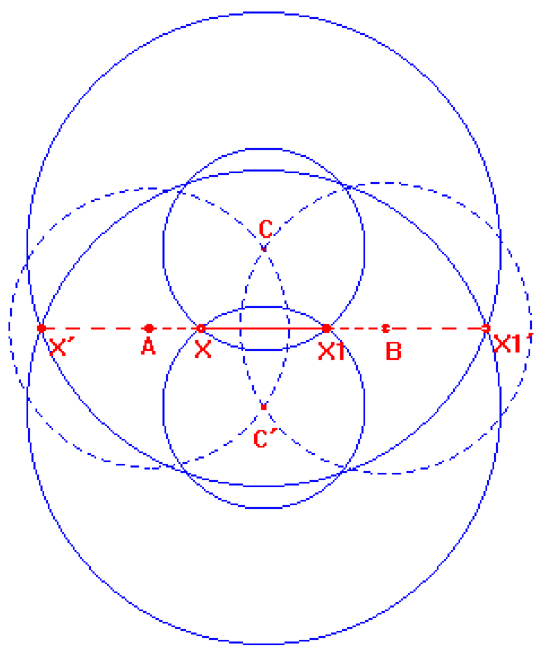


Figura 5. Obtendo os pontos internos e externos ao segmento AB.

Problema 6. Traçar os pontos de intersecção da circunferência dada (O, R) com a reta dada por dois pontos A e B.

Construção: No caso em que o centro O não se acha sobre a reta dada AB (figura 6) determinemos o ponto O´ que é simétrico ao centro O da circunferência dada respectivamente a reta AB (problema 1). Descrevemos a circunferência (O´, R) que intersectará a circunferência dada nos pontos buscados X e Y.

A validade da construção é evidente da simetria em relação à reta AB.

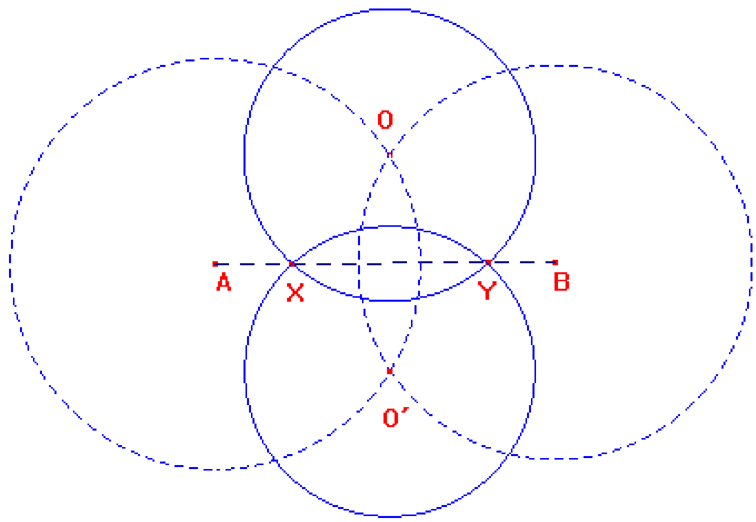


Figura 6. Achar os pontos de intersecção da circunferência e da reta dada.

Construção: no caso em que o centro O da circunferência dada se acha sobre a reta AB. Ao tomar o ponto A como centro descrevemos a circunferência de raio arbitrário d que intersectarão a circunferência dada nos pontos C e D dividimos os arcos CD da circunferência (O, R) pela metade (problema 4) os pontos X e Y encontrados neste procedimento são os buscados.

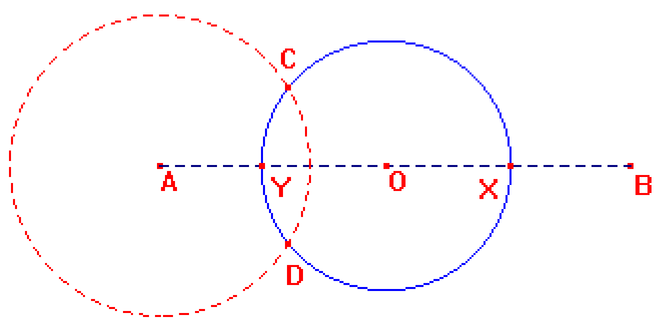


Figura 7. Achar os pontos de intersecção da circunferência e da reta dada.

Problema 7. Construir o ponto de intersecção de duas retas AB e CD cada uma das quais é determinado por dois pontos.

Construção: Marquemos os pontos C_1 e D_1 simétrico correspondente ao ponto C e D respectivamente a reta dada AB.

Descrevemos as circunferências (D_1CC_1) e (C, D) e designamos com E o ponto de intersecção, tracemos X que é quarto e proporcional ao segmento DE, DD_1 e CD (problema 3) Se agora descreve as circunferências (D,X) e (D_1,X), então na intersecção obteremos o ponto buscado X.

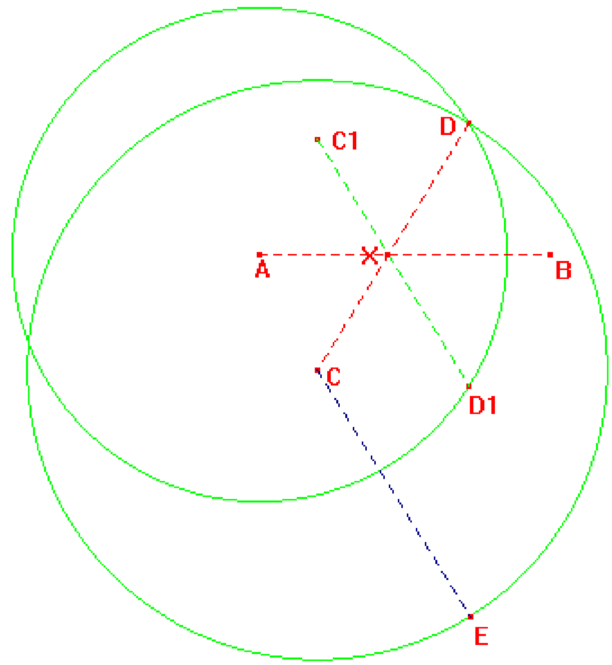


Figura 8. Encontrar o ponto de intersecção de duas retas dadas.

Demonstração: O ponto C_1 é simétrico ao ponto C e o ponto D_1 e simétrico ao ponto D, é evidente que encontramos o ponto de intersecção das retas CD e AB ao encontrarmos a intersecção de CD e C_1D_1.

A figura CC_1D_1E é paralelogramo, e por conseguinte, os pontos D, D_1 e E se encontram sobre uma reta os triângulos ΔCDE e ΔXDD_1 são semelhantes pela qual: $\frac{DE}{DD_1} = \frac{CE}{D_1X}$.

Mas $CE = CD = C_1D_1$

O segmento $D_1X = x$ é quarto proporcional aos segmentos DE, DD_1 e CD. Assim o ponto X está sobre a reta CD e sobre a reta paralela a CE passando por D_1, que coincide com C_1D_1, logo X é o ponto de intersecção de CD e C_1D_1, que é também a intersecção de AB e CD.

Cada problema em que para a construção o uso do compasso e a régua no plano de Euclides sempre se reduzem à seleção em uma ordem determinado dos problemas fundamentais mais simples seguintes:

1.Por dois pontos dados troça-se uma reta. Observamos que na geometria do compasso não é possível construir essa reta poís parte-se do ponto de vista que dois pontos definem uma reta.

2.De um ponto dado como centro, traçar uma circunferência de raio dado.

3.Determinam-se os pontos de intersecção das circunferências dadas;

4. Encontra-se os pontos de intersecção da circunferência dada e a reta determinada por dois pontos;

5.Acha-se os pontos de intersecção de duas retas dadas, cada uma determinada por dois pontos.

Observamos que os itens quatro e cinco são satisfeitos com os problemas 6 e 7 sem o uso uso da régua.

Para demonstrar que cada problema em construção se usa o compasso e a régua , pode se usar só o compasso sem usar a régua, e suficiente mostra que todas estas operações fundamentais podem cumprir-se usando só um compasso

1.2 Solução dos problemas geométricos de construção aplicando só compasso.

Nesta seção examinaremos a solução de alguns problemas interessantes da geometria com compasso elaborado principalmente pelo trabalho de Adler sobre o teorema de Morh, Mascheroni.

Problema 8. Levantar uma reta perpendicular ao segmento AB no ponto A.

Construção: Com uma abertura do compasso invariável e igual ao segmento arbitrário R, traçamos as circunferências (A,R) e (B,R) basta que se encontre no ponto O.

Descrevemos a circunferência (O,R) e construímos neste o ponto E que é diametralmente oposto ao ponto B, a partir do qual tracemos as cordas CD = DE = R. Onde C é o ponto de intersecção das circunferências (B,R) e (O R). O segmento AE $\perp$ AB, se pusermos R = AB.

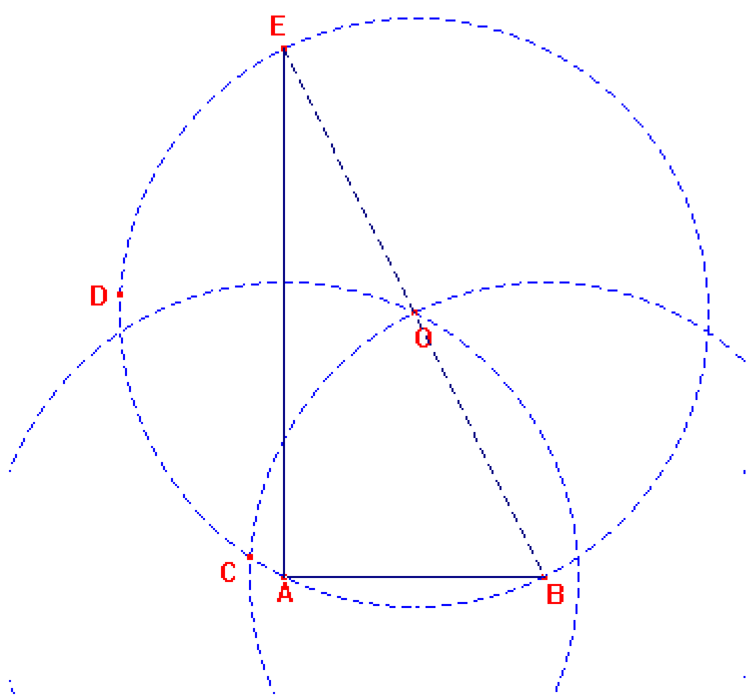


Figura 9. Construindo um segmento perpendicular ao segmento AB, passando por A.

Problema 9. Traçar uma paralela a uma reta dada AB passando por um ponto C fora dela.

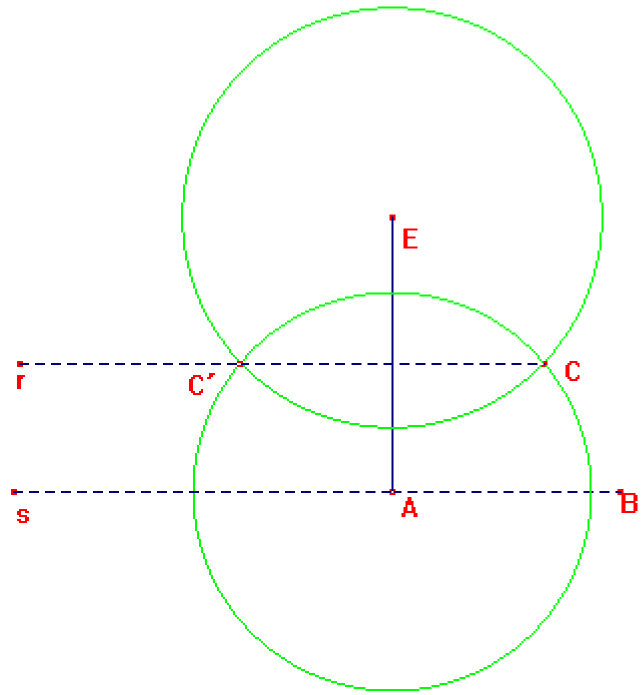


Figura 11. Traçando uma reta paralela a uma reta dada.

Usando o exercício 8 (procedimento 2) temos a reta AE perpendicular à reta dada AB, no ponto A, em seguida usando a propriedade de simetria do (problema 1) temos C simétrico a C´, logo a reta CC´ é paralela a reta AB.

Construção: tendo absorvido estes conhecimentos podemos solucionar vários problemas de maneira fácil como, por exemplo:

1) Traçar um segmento igual a $\frac{1}{2^n}$ um segmento AB dado (dividir o segmento AB em 2^n partes iguais n = 2,3...).

2) Traçar um segmento que seja n^k vezes maior que um segmento dado AB (n,k = 1,2,3,...).

3) Dividir o segmento AB em n partes iguais.

Problema 10. Achar o centro da circunferência desenhada.

Construção: Sobre a circunferência traçamos três pontos arbitrários, A, B e C. A partir das circunferências (A,B) e (B,A) encontramos os pontos D e D´ que são simétricos em relação a AB. Da mesma forma a partir das circunferências (B,C) e (C,B) obtemos os pontos E e E´que são simétricos com relação a BC. Afirmamos que o ponto O de intersecção das retas DD´e EE´é o centro da circunferência ABC.

Demonstração: A reta DD´é a mediatriz do segmento AB e a reta EE´é a mediatriz do segmento BC, logo o ponto O é ponto de encontro das mediatrizes do triangulo ΔABC que é o seu circuncentro, ou seja o centro da circunferência circunscrita a ΔABC

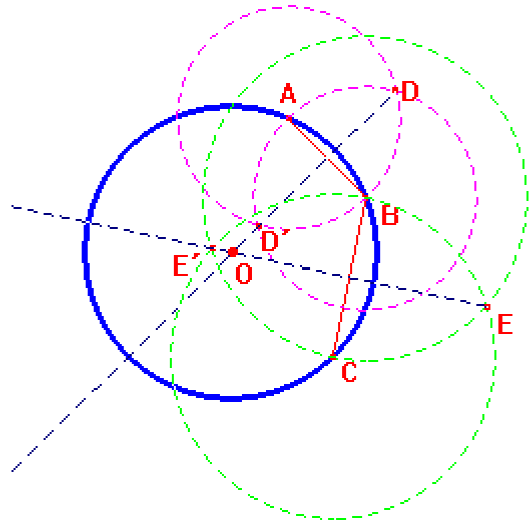


Figura 12. Achando o centro da circunferência.

1.3 Inversão e suas propriedades fundamentais

***Inversão*.**

A inversão é uma transformação geométrica que nos permite atacar, de forma metódica e unificada, determinados tipos de problemas.

A transformação do plano menos o ponto O em si mesmo definida pela correspondência que associa a cada ponto o seu inverso chama-se inversão de centro O e raio r. A circunferência C chama-se circunferência de inversão.

Dizemos que duas figuras F e F´ são inversas uma da outra quando podemos obter uma da outra por meio de uma inversão de todos seus pontos.

Com as mesmas notações utilizadas acima enunciamos algumas propriedades imediatas das inversões.

a) Toda inversão é uma involução, isto é, se P´ é o inverso de P e P´´ o inverso de P´ então P´´ = P.

b) Se P é um ponto da circunferência C de inversão então P´= P, isto é, a inversão restrita a C é a identidade.

c) A inversa de uma reta r passando pelo ponto O é a própria reta r. Observe, no entanto, que a inversão restrita a r não é a identidade.

d) A inversa de uma reta r que não passa pelo ponto O é uma circunferência C passando pelo ponto O.

e) A inversa de uma circunferência C_1 que não passa pelo ponto O é uma circunferência C'_1 que não passa pelo ponto O.

Definição:

Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Dado um ponto P ≠ O no plano definimos seu inverso (relativo a C) como o ponto P´ da semi-reta OP satisfazendo a igualdade.

OP.OP´= r^2

Inversão: $x' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; $y' = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ $(x, y) \neq (0,0)$.

Alguns destes fatos, como (a), (b) e (c) são imediatos pela própria definição de inversão. As propriedades (d) e (e) serão demonstradas mais adiante.

Da definição de inversão se deduz que a cada ponto P no plano que corresponde um único ponto inverso P´ no mesmo plano, alem disso se OP > r, OP´< r. Nenhum ponto do plano pode ser seu inverso respectivo ao ponto O,o que se deduz diretamente da igualdade (1).

Agora que já expusemos alguns fatos básicos relativos à inversão, temos condições de informar ao leitor a estratégia que pretendemos seguir. Uma vez que desejamos utilizar apenas o compasso, o plano é usar a inversão para transformar problemas de intersecção entre duas retas ou de intersecção entre uma reta e uma circunferência em problemas de intersecção de duas circunferências.Para retornarmos ao problema original, vamos precisar construir os inversos de determinados pontos em relação as circunferências conhecidas. Portanto, para poder tornar as idéias efetivas, vamos precisar saber resolver alguns problemas de inversão utilizando apenas o compasso. É o que faremos a seguir.

Apresentaremos alguns problemas mais elementares para dar seqüência a construções mais delicadas.

Ao final do século XIX A.Adler aplicou o principio de inversão e à teoria de construções geométricas feitas só com um compasso. Valendo-se deste principio estabeleceu na geometria do compasso o procedimento geral para resolver os problemas de construção.

Faremos aqui uma breve exposição de suas propriedades fundamentais que serão usadas posteriormente.

Suponhamos que no plano o desenho de certa circunferência (O,r) e o ponto P distinto do ponto O

Tomemos sobre a reta $\overrightarrow{OP}$, o ponto P´ de tal modo que o produto do comprimento OP e OP´ seja igual ao quadrado do raio da circunferência dada, quer dizer, $.OPOP' = r^2$.

O ponto P´ desta natureza se chama de inverso ao ponto P com respeito à circunferência (O,r). A circunferência (O,r) chama-se circunferência de inversão básica, seu centro O se chama centro ou pólo de inversão e, finalmente a magnitude r^2, potência de inversão.

Se o ponto P´ é inverso respectivo ao ponto P, é evidente que, o ponto P é inverso respectivamente ao ponto P´.

Lema1: Se os pontos P´ e Q´ são de inversão aos pontos P e Q respectivamente a circunferência (O, r) então arco $O\hat{P'}Q' \equiv O\hat{Q}P$, $O\hat{Q}'P' = O\hat{P}Q$.

Demonstração: Da igualdade OP. OP´= OQ.OQ´= r^2, $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$ se deduz que os triângulos ΔOQ´P´ e ΔOPQ são semelhantes (fig 1) sendo assim demonstrado a afirmação do lema.

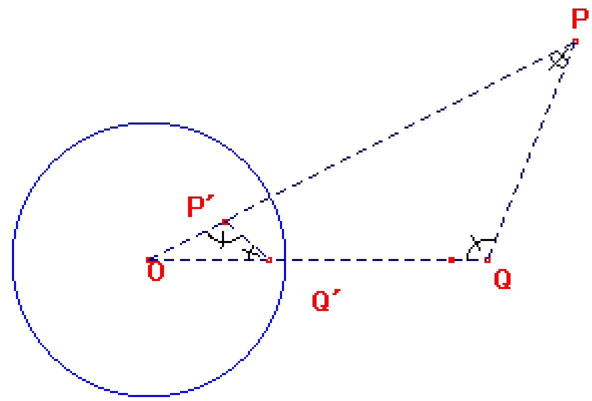


Figura 13. Demonstração do lema 1.

Teorema I: Se duas curvas se intersectam no ponto P, então as curvas inversas a estas se intersectam no ponto P´, que é de inversão ao ponto P.

Demonstração: Sejam k e y duas curvas, vamos supor que o conjunto dos pontos de intersecção das curvas k e y seja formado apenas por pontos isolados .

Então podemos encontrar uma região R, limitada por duas semi-retas a partir do centro da circunferência de inversão e por dois arcos centrados no centro da circunferência de inversão, tal que P seja o único ponto de intersecção de k e y nesta região, (ver figura).

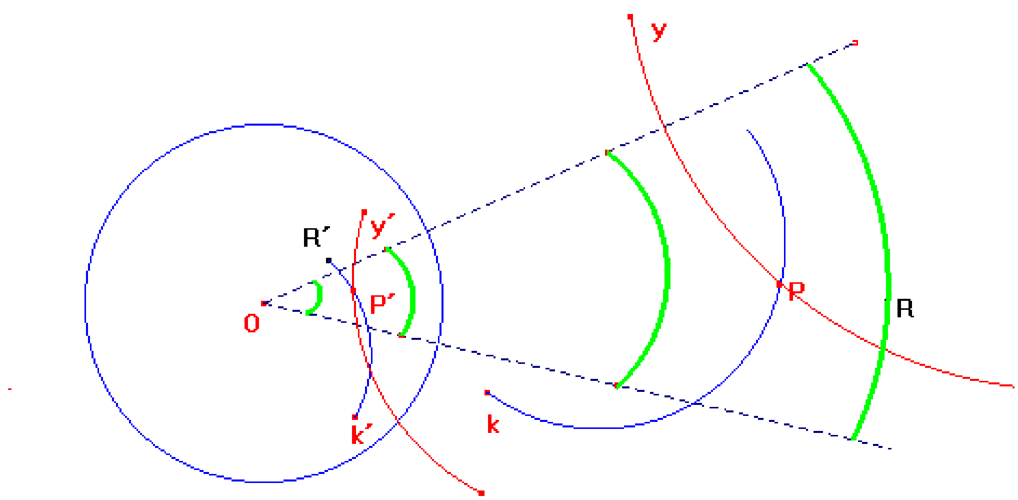


Figura 14. Auxiliar na demonstração do teorema 1.

Todos os pontos de R´ são inversos de pontos de R e estão em correspondência um a um .

Sejam k´ e y´ as inversas das curvas k e y, considere o ponto de k´ e y´ dentro da região R´.

Suponha que k´ e y´ não se cruzem em R´, então para todo P´ e Q´ respectivamente em k´ e y´ sobre a mesma semi reta a partir de O teremos OP´≠ OQ´.

Seja a semi reta OP e sejam P´= $\overrightarrow{OP} \cap$ k´ e Q´´ = $\overrightarrow{OP} \cap$ y´ inverso de Q´ deverá estar sobre a curva k e o inverso de Q´´ deverá estar sobre a curva y mas P é o ponto de intersecção de k e y então P é inverso de Q´ e de Q´´ simultaneamente.

Contradição, pois um ponto possui um único inverso em relação a uma circunferência de inversão.

Portanto as curvas k´ e y´ se cruzam em um ponto Q´ na região R´.

Temos que provar agora que Q´ é o inverso de P; Q´ está sobre k´ e y´ simultaneamente então seu inverso esta sobre k e y na região R.

Mas por construção na região k o único ponto que está sobre k e y é o ponto P, logo P é o inverso de Q´, cqd].

Teorema II: A reta que passa através do centro de inversão O é inversa a si mesma.

Demonstração: Pela definição de inversão o ponto P´ inverso a um ponto P pertence a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ assim todos os pontos da reta OP possuem suas inversas sobre a mesma reta.cqd

Teorema III: A curva inversa a reta dada AB que não passa através do centro de inversão, é uma circunferência (O_1, OO_1) que passa pelo centro de inversão O, do modo que sempre $OO_1 \perp$ AB.

Demonstração: Seja Q a base perpendicular baixada do centro de inversão O sobre a reta dada. Designemos com Q´ o ponto de inversão ao ponto Q. Tomemos na reta dada um ponto arbitrário P e designemos com P´ o ponto de inverso.

Baseados no lema podemos escrever: $O\hat{P'}Q' = O\hat{Q}P = 90º$.

Por tanto, o inverso de qualquer ponto P sobre a reta dada estará sobre uma circunferência de diâmetro OQ´. Seja O_1 o ponto médio de OQ´, O_1 será o centro da circunferência. Por construção o raio $OO_1 \perp$AB.

Neste caso a reta AB e a circunferência (O_1,OQ_1) são simultaneamente inversas,cqd.

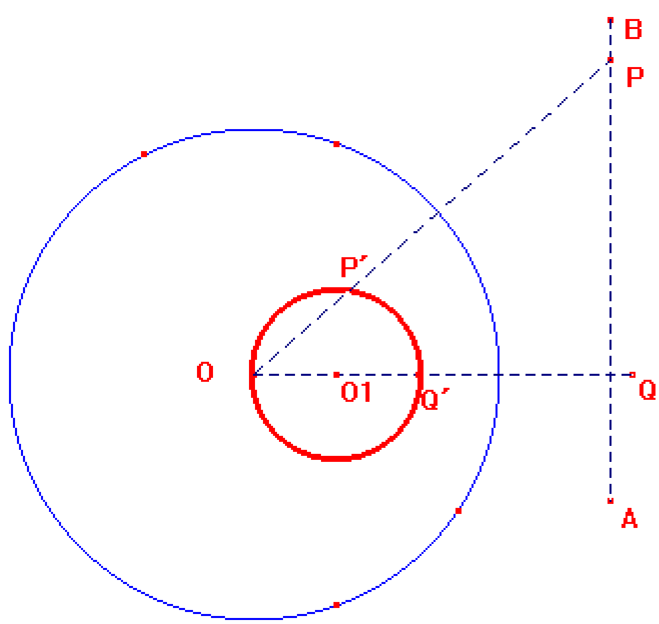


Figura 15. Para auxiliar na demonstração do teorema 3.

Teorema IV: A curva inversa a uma circunferência dada (O_1, R) que não passa através do centro de inversão, é também uma circunferência. Neste caso, a inversa do centro é o centro da circunferência inversa.

Demonstração: A reta OO_1 ligando o centro da circunferência de inversão (O,r) e o centro da circunferência dada (O_1, R) intersecta a última destas nos pontos A e B. Designemos com A´ e B´ os pontos de inversão aos pontos A e B. Tomemos na circunferência (O_1, R) um ponto arbitrário P e o seu ponto inverso a este designaremos com P´.

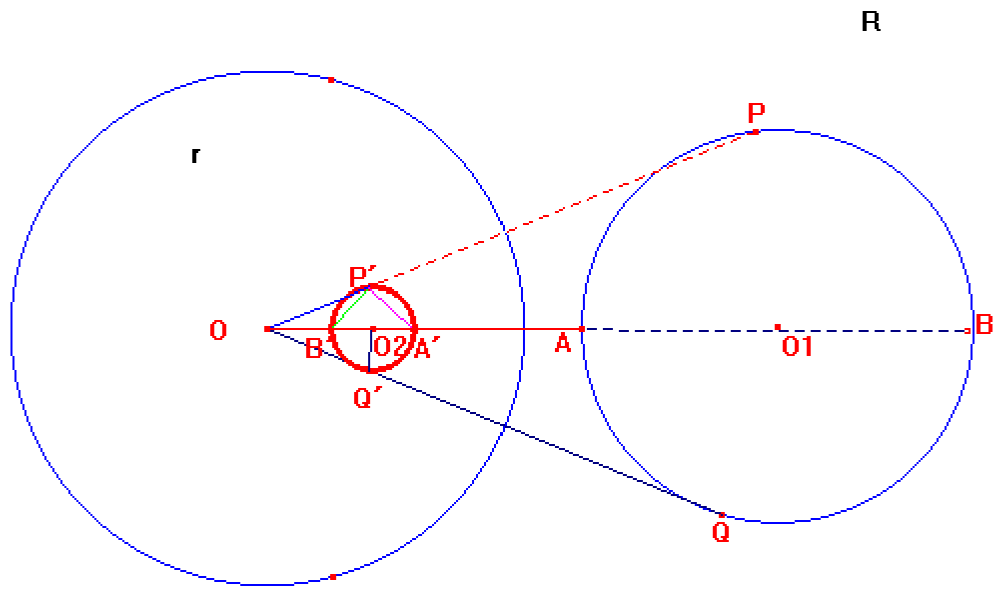


Figura 16. A curva inversa a uma circunferência que não passa pelo centro de inversão é uma circunferência.

Usando o lema temos:

$O\hat{A}'P' = O\hat{P}A$

$O\hat{B}'P' = O\hat{P}B$,

Assim:

$O\hat{B}'P' - O\hat{A}'P' = O\hat{P}B - OPA.$

Nos triângulos ΔA´B´P´ e ΔABP

$A'\hat{P}'B' = O\hat{B}'P' - O\hat{A}'P'$ e $A\hat{P}B = O\hat{P}B - O\hat{P}A = 90º$.

Ao tomar em consideração a igualdade anterior obteremos: $A'\hat{P}'B' = A\hat{P}B = 90º$

Então concluimos que a inversa da circunferência (O_1,R) é a circunferência $(O_2, O_2B' = R')$, onde O_2 é ponto médio de A´e B´, cqd.

1.4 Aplicação do método de inversão na geometria do compasso

Vamos utilizar as propriedades da inversão para solucionar os problemas de construção na geometria do compasso..

Problema 15. Traçar o ponto X de inversão ao ponto dado C respectivo à circunferência de inversão (O, r).

Construção: Para OC > $\frac{r}{2}$ descrevemos a circunferência (C, O) até que se intersecte nos pontos D e D1 com a circunferência de inversão. Se agora se traçarmos as circunferências (D, O) e (D_1, O) então na intersecção obtemos o ponto buscado X.

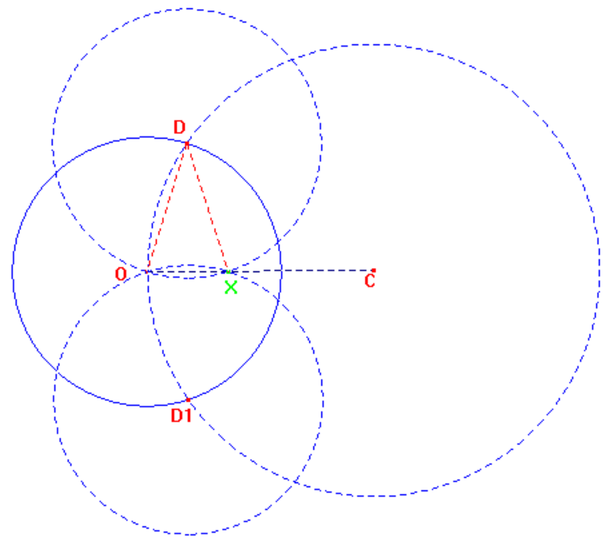


Figura. 17 Achar o ponto de inversão de um ponto dado C.

Demonstração: Sendo os triângulos isósceles ΔCDO e ΔDOX, semelhantes encontramos:

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OX} \quad OC.OX = OD^2 = r^2$$

Construção: se OC ≤ $\frac{r}{2}$ (figura 27). A circunferência (C, O) não intersectará a circunferência de inversão; por isso tracemos a principio o segmento OC_1 = nOC, para o número natural n tal que $OC_1 > \frac{r}{2}$ (problema 2) encontremos o ponto C'_1 que é de inversão ao ponto C_1 (procedimento 1 de construção do problema examinado). Tracemos o segmento Ox = nOC′. O ponto X e de inversão ao ponto dado C.

Demonstração: Substituindo OC_1= nOC e $OC'_1 = \frac{OX}{n}$ na igualdade $OC_1.OC'_1 = r^2$ obtemos: $OC_1.OC' = nOC\frac{OX}{n} = OC.OX = r^2$,cqd.

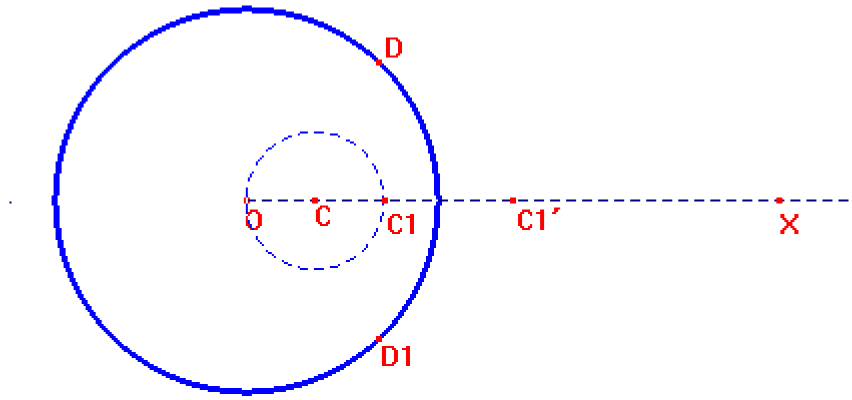


Figura 18. Achar o ponto de inversão quando o ponto está a uma distância menor que $\frac{r}{2}$ na circunferência .

Problema 16. Dada a circunferência de inversão (O, r) e a reta AB que não passa através do centro de inversão, descrever a circunferência inversa a reta dada.

Construção: tomemos O_1 que é simétrico ao centro de inversão O respectivo a reta AB (problema 1). Encontremos o ponto O'_1 inverso a O_1, a circunferência (O'_1, O) é inversa a reta dada AB.

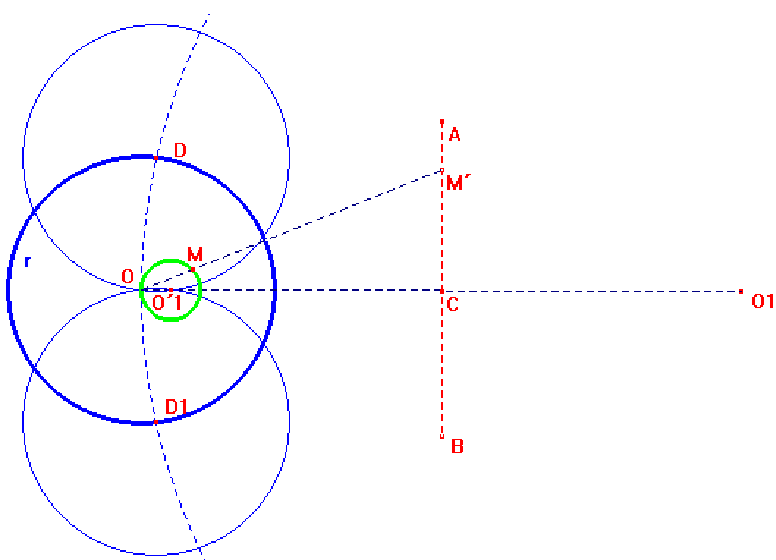


Figura 19. Dada uma circunferência de inversão e uma reta que não passa pelo centro de inversão encontrar a circunferência inversa à reta dada.

Demonstração. Seja C e C´ respectivamente o ponto de intersecção da reta OO_1 com a reta dada AB e o ponto de intersecção da circunferência (O'_1, O).com a reta OO_1.

Da construção exposta se deduz:

$OO_1.OO'_1 = r^2$,

$OO_1 = 2OC$; $OC' = 2OO'_1$ e

$OC \perp AB$.

Portanto $OO_1.OO'_1 = 2OC\dfrac{OC'}{2}. \; = OC.OC' = r^2$

Em virtude do teorema III a circunferência (O'_1, O) é inversa a reta AB,cqd.

Problema 17. Traçar a reta AB inversa a circunferência dada (O_1,R) que passa pelo centro da inversão O.

Construção: Se a circunferência dada intersecta a circunferência de inversão nos pontos A e B, então a reta AB é inversa a esta circunferência. Em caso contrário tomemos a circunferência dada os pontos A_1 e B_1 (figuro 29) e achemos os pontos A e B de inversão aos primeiros (problema 15). A reta AB é inversa a circunferência dada (O_1,R).

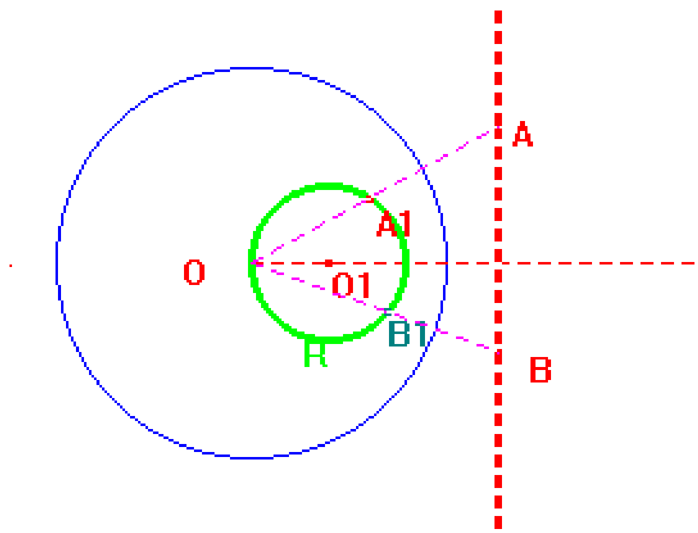


Figura 20. Dada uma circunferência que passa pelo centro de inversão achar a reta inversa a esta circunferência.

Problema 18. Seja dada a circunferência (O_1,R) que não passa pelo centro de inversão O. Traçar a sua circunferência inversa.

Construção: Tomemos a circunferência dada (O_1,R) como a circunferência de inversão e marquemos o ponto O´ que seja de inversão ao ponto O (problema 15).Logo determinamos o ponto O_2 que seja de inversão a O´ respectivo à circunferência de inversão (O, r). O ponto O_2 é o centro da circunferência procurada.

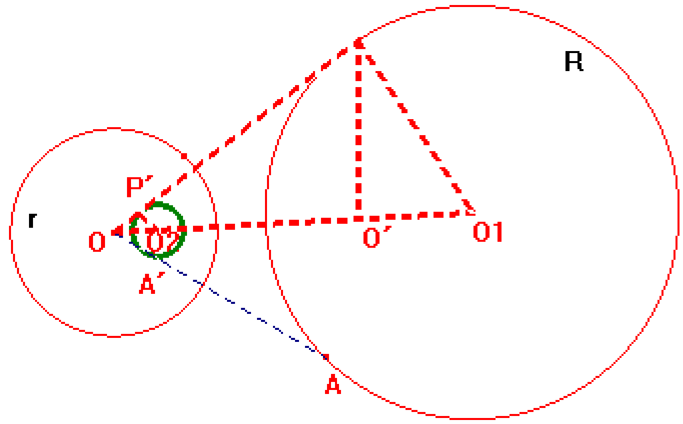


Figura 21. Dada uma circunferência que não passa pelo centro de inversão O, achar a circunferência inversa.

Tomemos na circunferência dada (O_1, R) um ponto arbitrário A e determinemos o ponto A´ que e de inversão a primeira circunferência (O_2, A´) e inversa a circunferência dada (O_1, R).

Demonstração: Seja P sobre a circunferência (O_1,R) tal que $O'P \perp OO_1$.

Temos que O_1P = R por outro lado O´ é inverso de O em relação a O_1 e portanto $O_1O'.O_1O = R^2$. Disto concluímos que o triângulo ΔOPO_1 é retângulo em P, logo OP é tangente a (O_1,R).

Seja P´ inverso de P em relação a O. Considere os triângulos $\Delta OP'O_2$ e $\Delta OO'P$

$OP.OP' = r^2 \quad \rightarrow \quad OO_2 OO' = r^2 \quad \rightarrow \quad \frac{OP`}{OO_2} = \frac{OO'}{OP}$ e como o ângulo Ô é comum

temos que $\Delta OP'O_2 \approx \Delta OO'P$ portanto o ângulo $O\hat{P'O_2}$ é reto.

E como P está sobre a circunferência (O_1,R) então P´ por construção está sobre a circunferência (O_2,A´). Então OP´é tangente a (O_2,A´)

Portanto (O_2,A´) é de fato a circunferência inversa de (O_1,R).

.

Problema 19. Encontra o centro da circunferência desenhada.

Construção: Tomemos na circunferência dada o ponto O e com o raio arbitrário r descrevemos a circunferência (O, r) que intersectará a circunferência dada nos pontos A e B acertamos a circunferência (O, r) com circunferência de inversão e marquemos o centro da circunferência que seja inversa a reta AB (problema 16). Para cumprir a ultima construção tracemos as circunferências (A, O) e (B, O) basta que se encontrem no ponto O_1; descrevemos a circunferência (O_1, O) e anotemos os pontos D e D_1 de sua intersecção com a circunferência de inversão. As circunferências de (D, O) e (D_1, O) determinarão o centro buscado da circunferência desenhada.

Demonstração: Os pontos A e B são de inversão a si mesmos pontos que se acham sobre a circunferência de inversão. De um modo, a circunferência desenhada dada e a reta AB são mutuamente inversas.

Como O_1 é simétrico de O em relação a AB, O'_1 é o seu inverso de acordo com o (problema 15) e portanto o centro da circunferência é desenhada de acordo com (problema 16),cqd.

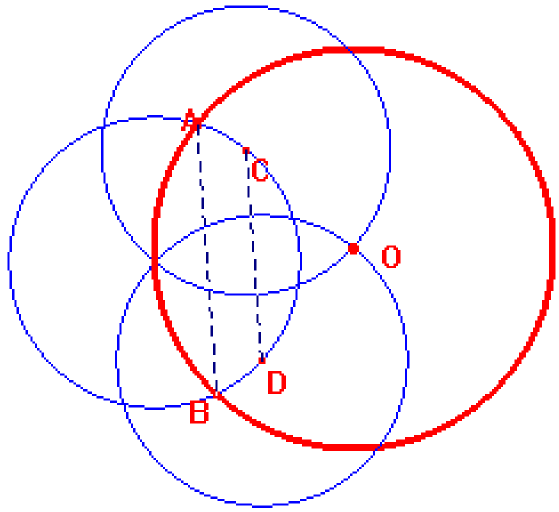


Figura 22. Dada uma circunferência qualquer achar o seu centro.

Temos que o processo de inversão aplicado a geometria do compasso é uma forma diferente de construção mas, que sozinha satisfaz toda a geometria do compasso.

Problema 20. Dado uma circunferência e uma reta achar os pontos em que esta reta intersecta a circunferência.

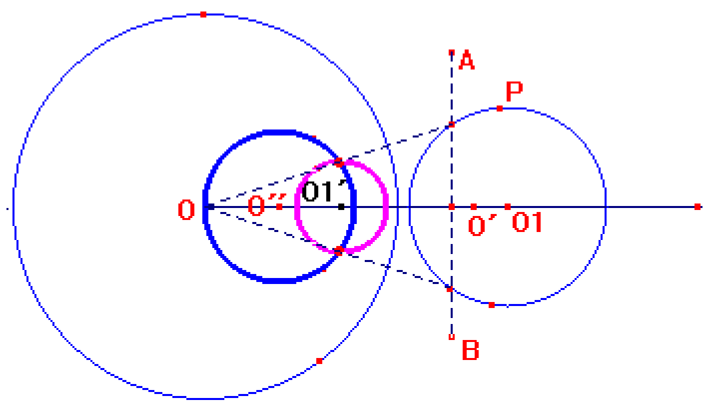


Figura 23. Verificar os pontos da reta onde cortam a circunferência dada.

Temos que toda esta construção esta baseada nos problemas 15,16 e 18.

Problema 21. Dada duas retas e uma circunferência achar os pontos de intersecção das duas reta.

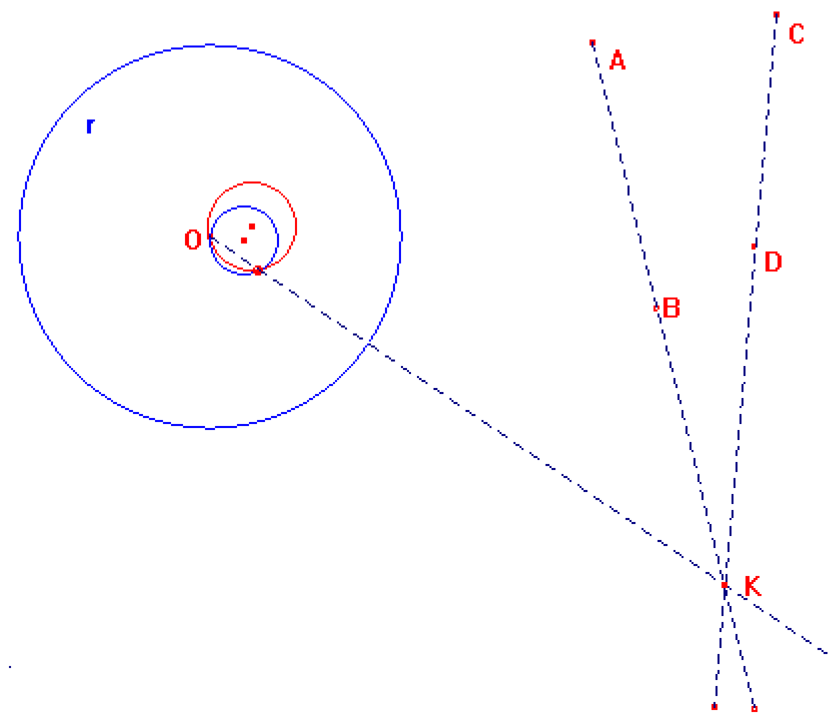


Figura 24. Achar o ponto de intersecção das retas.
Para resolver este problema utilizamos os (problemas 15 e 16).

Capítulo 2

Geometria da Régua

2.1Construção com a régua

Só no século XIX foi reconhecido por completo o poder construtivo da régua e do compasso ou, seja os problemas que solucionaram-se com estes utensílios clássicos das construções geométricas (com ambos ou com cada um por separado), antes alguns matemáticos consideravam a régua e o compasso como instrumentos universais, ao usar os dois, para resolver quaisquer problemas construtivos. Tal ponto de vista desempenhou um papel negativo na história do desenvolvimento da geometria, isto estimulou abordar cada problema de construção com uma idéia pré-concebida acerca de sua solução mediante uma régua e um compasso e motivou em muitos casos que se gastaram grandes esforços para a busca de soluções não existentes; assim aconteceu , por exemplo com os problemas acerca da quadratura do circulo, a trisecção do ângulo e a duplicação do cubo.

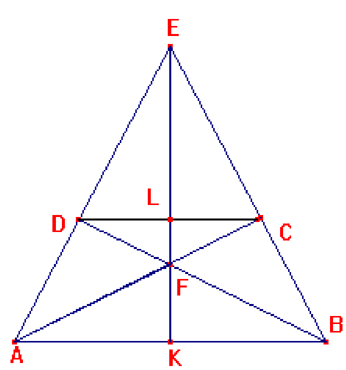
O estudo das construções realizadas somente com uma régua foi provocado pelo desenrolar da teoria da perspectiva, assim como pela necessidade de efetuar as construções em extensos setores da superfície terrestre, onde a aplicação do compasso com grande abertura é tecnicamente impossível de efetuar.

No presente trabalho se examinam os problemas de construção resoluveis valendo-se apenas de uma régua.

2.2 Construções por meio de uma régua se estão prefixadas duas retas paralelas.

Nas construções, que examinaremos a continuação, usaremos com freqüência o seguinte teorema:

Teorema 1: Uma reta, que passa pelo ponto de intersecção das diagonais de um trapézio e pelo ponto de intersecção de seus lados não paralelos, divide pela metade cada um dos lados paralelos do trapézio.



Demonstração: Temos os seguintes pares de triângulos semelhantes: ΔAKE e ΔDLE, ΔKBE e ΔLCE, ΔAKF e ΔCLF, ΔKBF e ΔLDF. Daqui concluímos que $\frac{AK}{DL}=\frac{KE}{LE};\frac{KB}{LC}=\frac{KE}{LE} e \frac{AK}{LC}=\frac{KF}{FL},\frac{KB}{DL}=\frac{KF}{FL}$.

Destas correlações se desprendem as proporções: $\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{LC},\frac{AK}{KB}=\frac{LC}{DL}$.

Figura 1. para auxiliar na demonstração do teorema 1.

Ao multiplicarmos termo a termo as ultimas igualdades, obtemos : $\left(\frac{AK}{KB}\right)^2=1$.

Logo AK = KB, da mesma forma mostramos que DL = LC, cqd.

Problema 1. Sejam dados o segmento AB e seu ponto médio K. Traçar pelo ponto dado D uma reta paralela a reta AB.

Construímos as retas AD, BD, BE e KE, onde E é um ponto arbitrário da semi-reta $\overrightarrow{AD}$ fora do segmento AD(ver a fig 1) Designemos por F o ponto de intersecção das retas BD e KE. Tracemos a reta AF, esta corta BE em certo ponto C. Construímos a reta CD, esta é paralela a reta AB pelo (teorema 1).

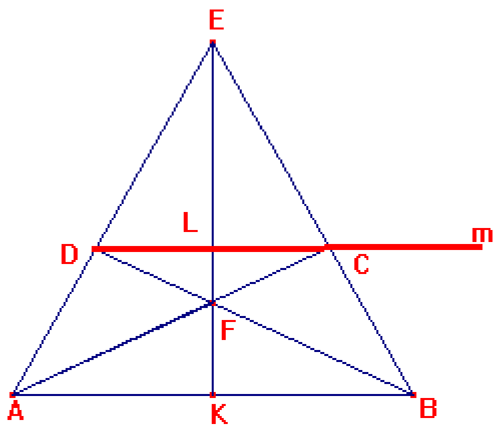


Figura 1.1 Traçar uma reta paralela a uma reta dada dando seu ponto médio.

Problema 2. As retas *l* e m são paralelas. Dividir pela metade o segmento AB da reta *l*.

Tomemos um ponto arbitrário E, que não se acha nem sobre l nem sobre m, tracemos as retas AE e BE. Sendo que estas retas intersectam m correspondentemente nos pontos D e C. Construímos as retas AC e BD, designemos seu ponto de intersecção por F. A reta EF passará através do ponto médio do segmento AB.

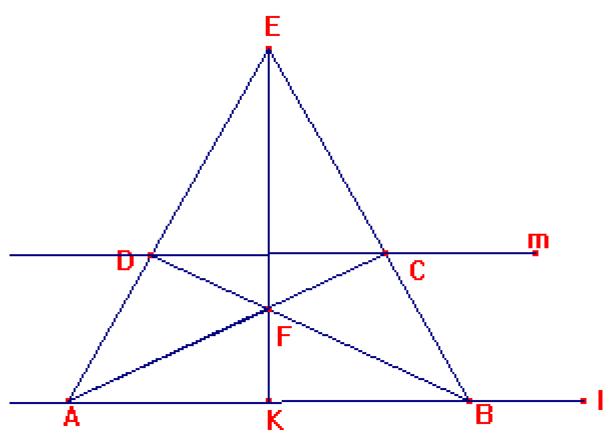


Figura 2. Achar o ponto médio do segmento AB

Problema 3. Pelo ponto A que se encontra fora das retas paralelas dadas *l* e m, traçar uma paralela as retas dadas.

Dividimos pela metade um segmento arbitrário sobre a reta *l* (problema 2) por A traçamos uma reta paralela a reta *l* (problema 1).

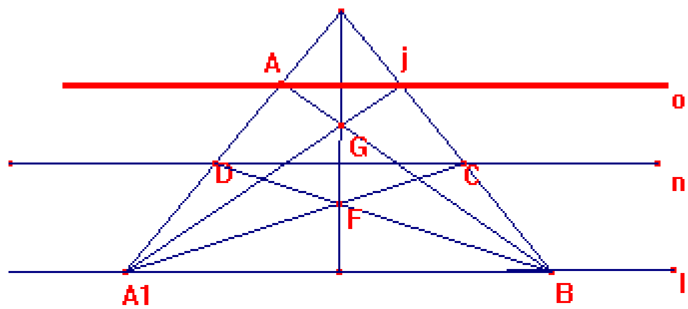


Figura 3. Achar uma reta paralela a outras duas retas passando por um ponto dado.

Problema 4. Sejam dadas duas retas paralelas l e m e o segmento AB sobre l. Aumentar o segmento AB n vezes.

Através do ponto arbitrário K (fig 4) que se encontra fora das retas l e m tracemos uma reta p paralela as retas dadas (problema 3). Construímos as retas AK e BK; sendo que estas cortam m nos pontos A´ e B´, respectivamente .Construímos a reta BA´, que intersecta p no ponto L, e a reta LB´, que intersecta *l* no ponto C. Então AB = BC. Ao continuar a construção obtemos os segmentos CD, DE, etc; cada um destes é igual ao segmento AB. fig(4)

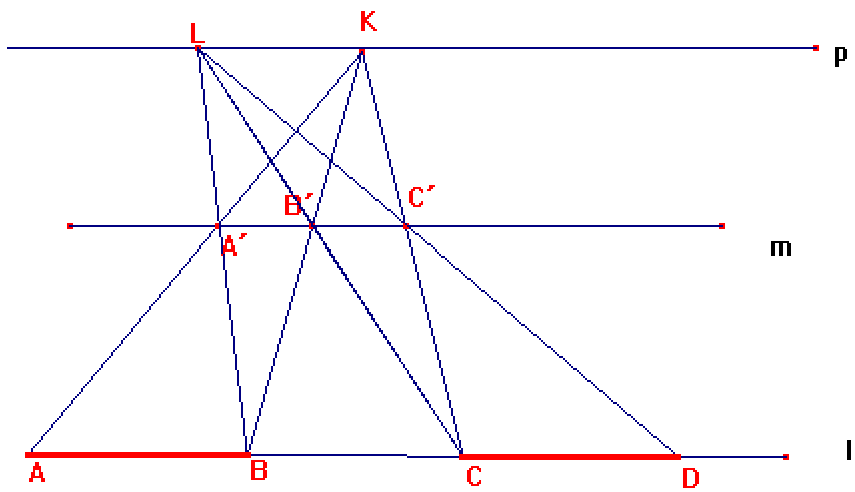


Figura 4. Aumentar o segmento AB n vezes sobre a reta *l*.

Problema 5. Sejam dadas duas retas paralelas l e m, sobre l se encontra o segmento AB e o ponto C. Construir sobre l o segmento CD igual ao segmento AB.

Pelo ponto arbitrário K fora das retas l e m tracemos uma reta paralela às retas dadas (problema 3).em seguida partimos de C passando pela intersecção de B´com m e projetmos na reta p o ponto L´, então partindo de L´ e passando pela interseção de A´ com m projetamos na reta l o ponto D´ tal que D´C é igual AB (figura 5). Logo o problema tem duas soluções (segmento CD e CD´).

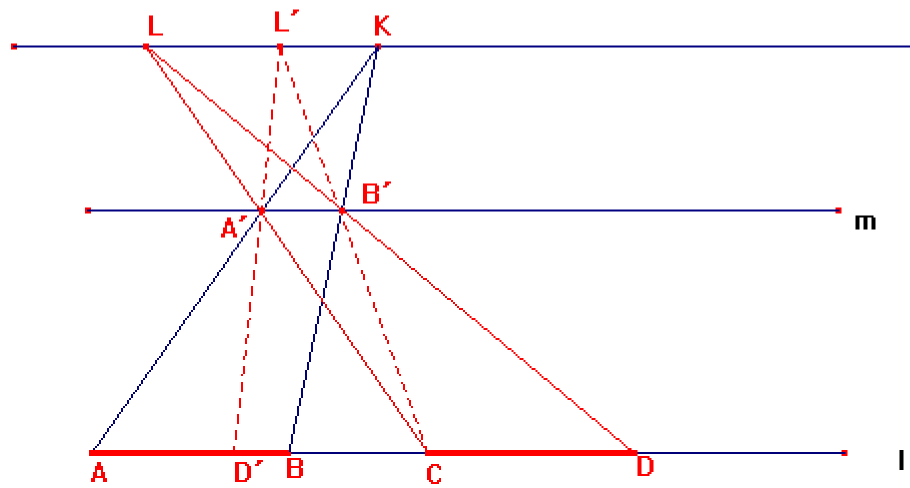


Figura 5. Construir um segmento na reta *l* igual ao segmento pré fixado AB passando por C.

Problema 6. Sejam dadas duas retas paralelas *l* e m e sobre *l* o segmento AB. Dividir este segmento em n partes iguais.

Suponhamos que se exige dividir o segmento AB em três partes iguais. Se aumentarmos o segmento AB três vezes de tal modo como foi feito no problema 4, obteremos sobre a reta m os segmentos iguais entre si A´B´, B´C´e C´D´. traçamos as retas AD´ e BA´; designemos o ponto de sua intersecção por M (figura 6) . Construímos, finalmente, as retas B´M e C´M; estas dividem o segmento AB em três partes iguais.

Demonstração: Isto se demonstra pelas semelhanças dos triângulos ΔAMC´´ ≈ ΔD´MC´, ΔC´´MB´´ ≈ ΔC´M B´, ΔB´´MB ≈ ΔB´MA´.

Assim temos, $\dfrac{MC''}{MC'} = \dfrac{AC''}{D'C'}$, $\dfrac{MC''}{MC'} = \dfrac{MB''}{MB'} = \dfrac{C''B''}{C'B'}$, $\dfrac{MB''}{MB'} = \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{B''B}{B'A'}$ logo $\dfrac{AC''}{D'C'} = \dfrac{C''B''}{C'B'} = \dfrac{B''B}{B'A'}$, como D´C´= C´B´= B´A´ temos que AC´´ =C´´B´´ = B´´B logo o segmento AB ficou dividido em três partes iguais.

Podemos generalizar para o caso n, ou seja no caso dividir AB em n partes iguais será possível se ampliarmos o segmento AB n vezes sobre a reta *l* , em seguida aplicamos a idéia de construção do problema 6.

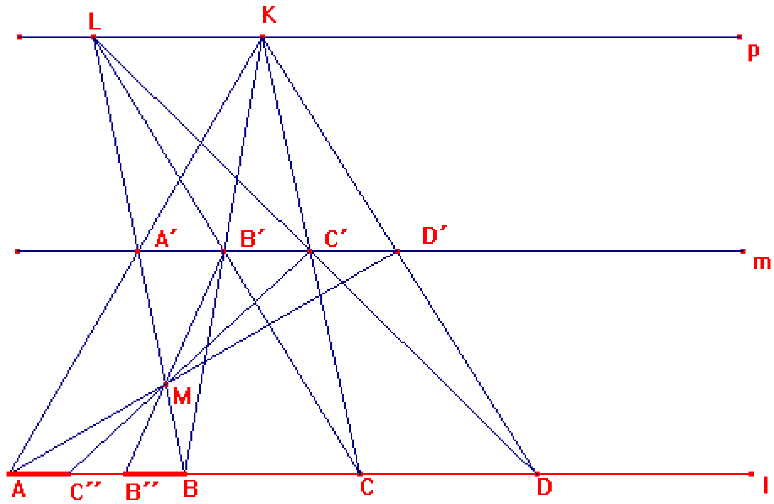


Figura 6. Dividir um segmento AB em n partes.

2.3 Construções mediante uma régua, se é dado uma circunferência e seu centro.

Se o problema da construção é resolúvel valendo-se de uma régua e um compasso, então, como se sabe sua solução mediante o método algébrico se reduz a construção das raízes de uma ou várias equações algébricas de primeiro e segundo grau. Com tais motivos, tais problemas serão denominados problemas do segundo grau.

Merece atenção o fato seguinte: cada problema de construção de segundo grau pode ser resolvido sozinho mediante a régua, se no plano das construções está traçada uma circunferência e indicado o seu centro. Para a demonstração é suficiente convencer-se com a ajuda deste instrumento pode achar os pontos de intersecção de uma circunferência, pré-fixada mediante seu centro e seu raio, com uma linha reta, assim, como o ponto de intersecção de duas circunferências, pré-fixadas de modo análogo. Verdadeiramente nos problemas de construções o compasso se usa somente para efetuar essas duas operações. As construções correspondentes serão examinadas por nós nos problemas 15 e 16. Por esta razão, inicialmente examinaremos alguns problemas de construções principais e praticamente o melhor procedimento de sua solução. Consideremos que no plano do desenho de cada um dos problemas deste parágrafo esta traçada uma circunferência auxiliar x e seu centro K.[4]

Problema 7. Construir um quadrado.

Construímos o diâmetro AB da circunferência x (fig. 49) e traçamos sua corda A\` B\` paralela a AB (problema 1) Pelo ponto C de intersecção das retas AA´ e BB\` tracemos a reta CK; esta cortará a circunferência x nos pontos D e E. O quadrilátero ADBE é um quadrado.

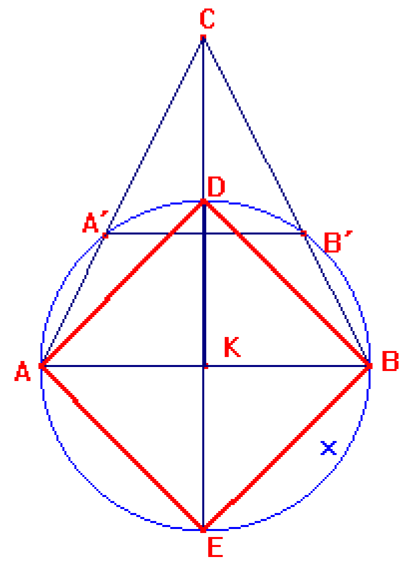


Figura 7. Dada uma circunferência inscrever um quadrado.

Demonstração: De fato, qualquer diâmetro que intersecte o ponto médio de uma corda é perpendicular à mesma. Assim DE $\perp$ A´B´ e portanto DD $\perp$ AB. Como K é o centro da circunferência temos que os ângulos, $D\hat{A}E$, $A\hat{D}B$, $B\hat{E}A$, $D\hat{B}E$ são todos retos e DB = BE = EA = AD, logo ADBE é um quadrado.

Problema 8. Traçar por um ponto P dado, uma reta paralela a reta *l* dada.

Construção: Se *l* passa através de K, teremos o problema 1. Caso contrário tome um ponto M sobre *l* e trace a reta MK que intersectará a circunferência nos pontos U e V, então K é ponto médio do segmento UV (ver figura 8). Tome X sobre a circunferência e trace XY paralela a KM por X (problema 1) sendo o outro ponto de intersecção de X com a circunferência. Seja A, a intersecção de XY com *l*.

Sejam XX´ e YY´ diâmetros de circunferências dadas, considerando os triângulos ΔKXY e ΔKX´Y´ temos KX ≡ KX´, KY ≡ KY´ e $Y\hat{K}X \equiv Y'\hat{K}X'$ logo os triângulos ΔKXY e ΔKX´Y´ são congruentes, portanto $K\hat{X}Y \equiv K\hat{X}'Y'$ o que implica que XY// X´Y´.

Seja B a intersecção de X´Y´ com *l*.

Pelo teorema de tales, temos ainda $\frac{KX}{MA} = \frac{X'K}{BM} \rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{X'K}{KX} = 1$.

Assim M é o ponto médio de AB e podemos agora utilizar o problema 1 para construir uma reta paralela a *l* pelo ponto P,cqd .

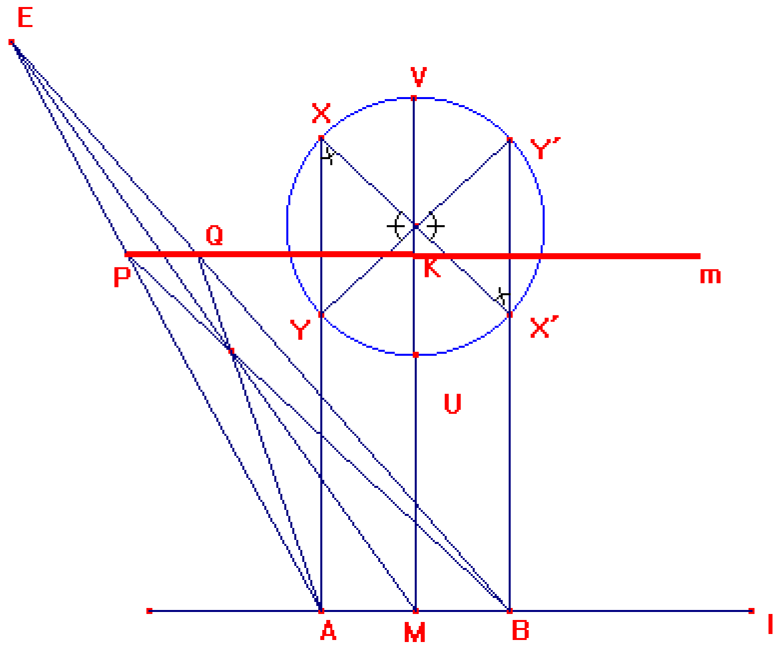


Figura 8 traçar uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto dado qualquer P.

Problema 9. Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a reta *l* dada.

Se *l* intersecta a circunferência x nos pontos A e B, mas não passa através de seu centro, então traçamos o diâmetro AC da circunferência x; a reta CB e perpendicular a *l* (figura 9). Depois por P, traçamos uma paralela a CB. Caso a reta l intersecte o centro K da circunferência dada, PM não intersecte a circunferência construímos AB // *l* intersectando a circunferência x nos pontos A e B então utilizamos o procedimento anterior.

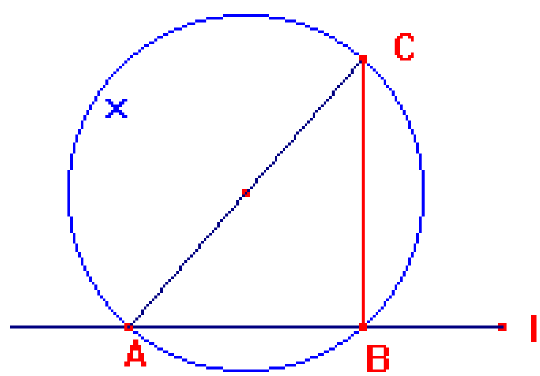


Figura 9. Traçar uma reta perpendicular a um ponto dado.

Problema 10. Traçar por um ponto dado P uma reta que forma com a reta prefixada *l* um ângulo dado MON = λ.

Demonstração: Seja K o centro da circunferência dada construa KA // OM e KB // ON (problema 1) onde A e B estão sobre a circunferência (ver figura 10). Construa também KC // *l* com C sobre a circunferência.

Determine a corda BC e AD // BC os triângulos ΔKBC e ΔKAD são isósceles, assim $K\hat{B}C \equiv K\hat{C}B$ e $K\hat{A}D \equiv K\hat{D}A$. Sejam X e Y respectivamente as intersecções de KA com BC e de KD com BC. Como BC // AD então $K\hat{X}Y \equiv K\hat{Y}X$ mas $K\hat{X}Y = K\hat{B}X + X\hat{K}B =$ $K\hat{B}C + A\hat{K}B$

$K\hat{Y}X = K\hat{C}Y + Y\hat{K}C = K\hat{C}B + D\hat{K}C$ logo $A\hat{K}B \equiv D\hat{K}C \equiv M\hat{O}N$

basta agora traçarmos por P uma paralela a KD, seja D´ a intersecção desta reta com *l*, o ângulo $P\hat{D'}F'$ (ver figura) é congruente a $M\hat{O}N$.

Podemos ainda obter uma segunda solução considerando a corda AC e BE // AC. Por um processo análogo verificamos que $E\hat{K}C \equiv M\hat{O}N$ traçando por P uma paralela a KE e sendo E´ o ponto de intersecção desta paralela com *l* teríamos que $P\hat{E'}F' \equiv M\hat{O}N$.cqd.

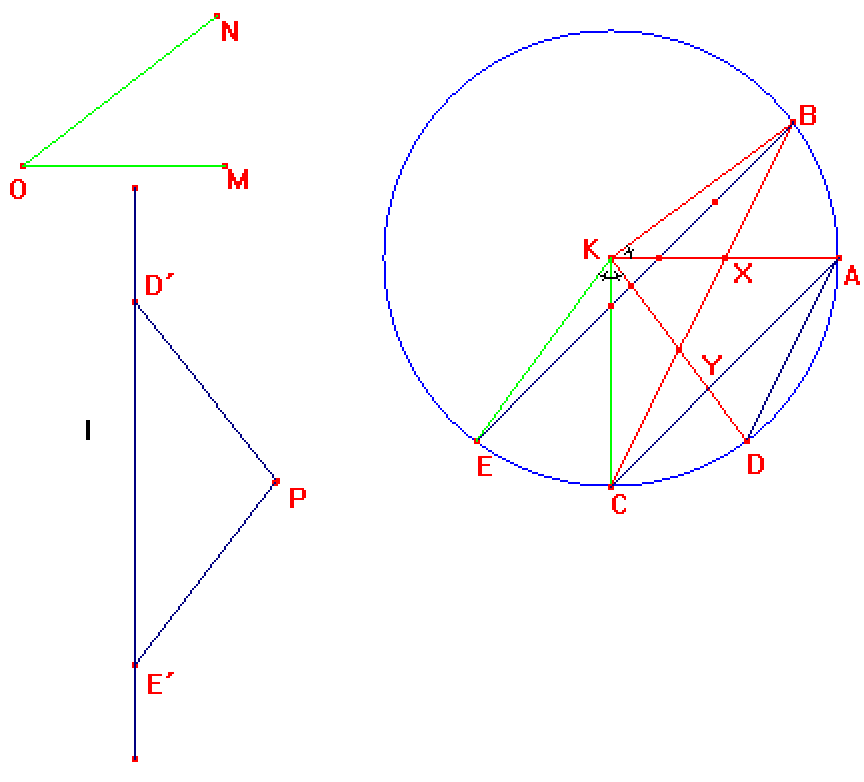


Figura 10. Traçar por um ponto dado e uma reta prefixada um ângulo congruente ao ângulo dado.

Se o ângulo λ é agudo ou obtuso, o problema tem duas soluções.

Problema 11. Duplicar o ângulo $M\hat{O}N$ = a

Construção: Tracemos paralelamente OM o diâmetro AB da circunferência x e paralelamente a reta ON a corda AC (Figura 11) então ângulo $B\hat{K}C = 2a$, o lado OR do ângulo MÔR é paralelo a reta KC sendo MÔR = 2MÔN.

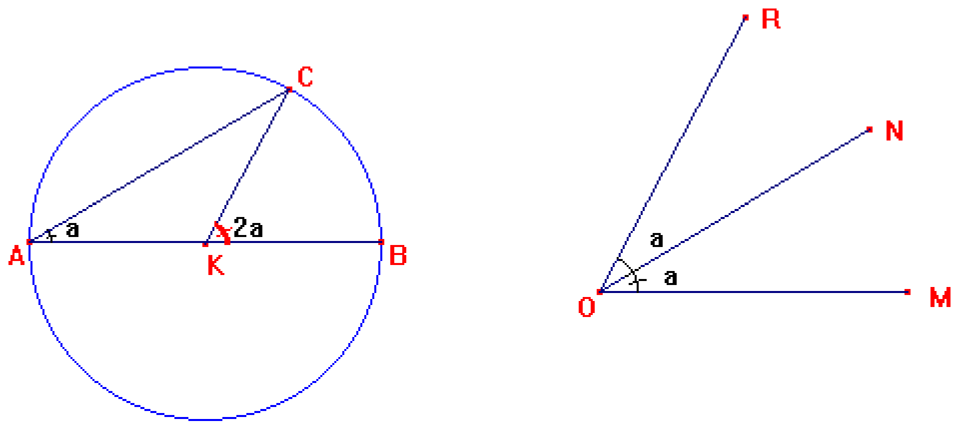


Figura 11. Duplicar um ângulo dado

Problema 12. Construir a bissetriz do ângulo dado MON = a.

Construção: Tracemos paralelamente OM o diâmetro AB da circunferência x e paralelamente a reta ON o raio KC da circunferência. Traçamos a corda AC e pelo ponto O a semi-reta $\overrightarrow{OR}$ paralela a AC ver (figura 12). O ângulo MÔR é côngruo a $\dfrac{M\hat{O}N}{2}$.

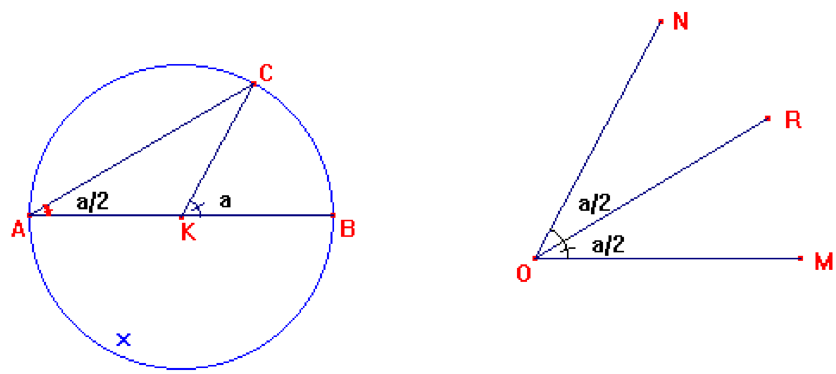


Figura 12. Encontrar a bissetriz de um ângulo dado.

Problema 13. Sejam dados o segmento AB e a semi-reta h com o vértice C. Construir sobre h o segmento CD igual AB.

Construção: Construímos o paralelogramo KABH e tracemos paralelamente a h o raio KF fig 13. Seja os raios KH e KF intersectam a circunferência x nos pontos E e F. Tracemos as retas

EF e HL // EF sendo sua intersecção com KF no ponto L. Construímos o paralelogramo CKLD. O segmento CD é o procurado.

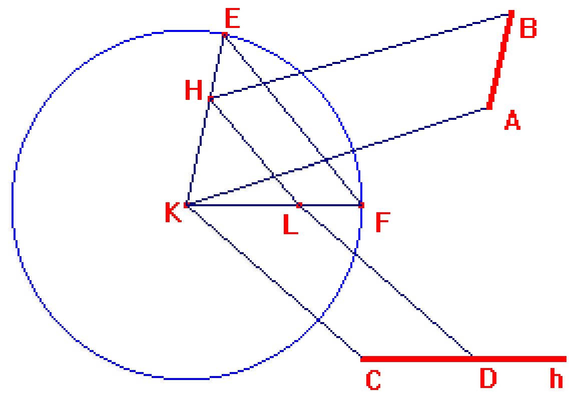


Figura 13. Dado um segmento AB e uma semi-reta h, construir sobre h o segmento CD igual AB.

Problema 14. Construir os pontos de intersecção da reta dada *l* com a circunferência μ prefixada pelo centro M e o raio MN, mas não traçada.

primeiramente temos que construir, a partir de três segmentos dados encontrar um quarto segmento proporcional aos três segmentos dados, tal que $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{OQ}$, onde OQ é a quarta e proporcional a AB,CD,EF.

Construção: Dado um ponto O, que pode ser o centro K da circunferência fixada, trace duas semi-retas não opostas r e s com vértices em O. Construa pelo (problema 6) os segmentos OM e ON sobre r tal que OM ≡ AB e ON ≡CD (problema 6) e sobre a reta s o segmento OP ≡ EF trace PM e por N uma paralela a PM (problema 9) que cruza s em Q, então OQ é tal que $\frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ} \rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{OQ}$.

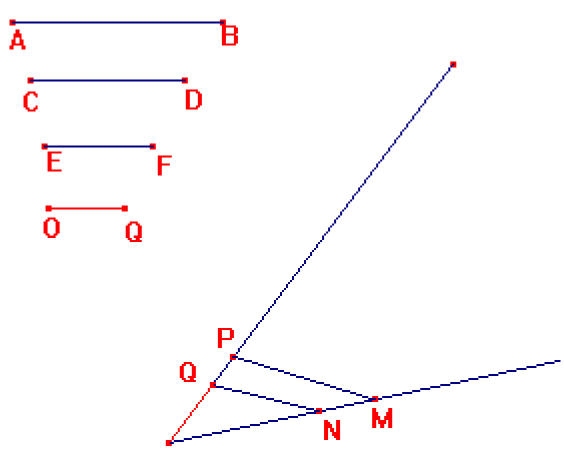


Figura 14 achar quarta e proporcional a três segmentos dados.

Construção: Tracemos o raio KL da circunferência x paralelo a reta MN fig 15. Construímos as retas KM e LN e achemos o ponto A de sua intersecção que é o centro de semelhança as circunferências x e μ.

Tomemos agora dois pontos aleatórios B e C sobre *l* e tracemos BA e CA temos que encontrar os pontos B´e C´ tais que $\frac{AM}{AK} = \frac{AB}{AB'} e \frac{AM}{AK} = \frac{AC}{AC'}$ ou seja AB´é a quarta proporcional de AM,AK e AB e AC´é a quarta proporcional de AM, AK e AC. Por semelhança dos triângulos ΔABC e ΔAB´C´ temos que B´C´//l. Sejam X´ e Y´ os pontos de intersecção de B´C´ com a circunferência x. Ao encontrarmos os pontos X e Y respectivamente na intersecção de AX´com l e AY´com *l* teremos os pontos de intersecção de l com (M,N)

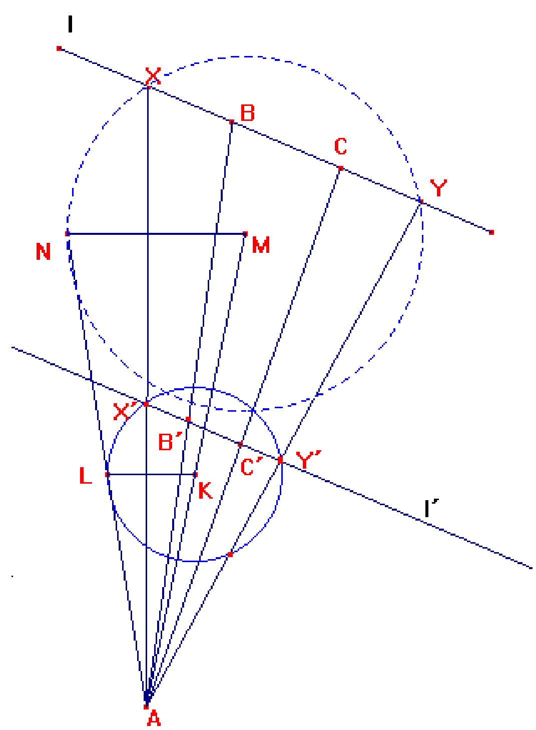


Figura 15. Construir os pontos de intersecção, onde são dados uma reta *l*, um centro e o raio de uma circunferência pré-fixada.

(na figura esta construído o centro exterior de semelhança).

Logo encontremos a reta l´, a qual passará a reta l, se aplicamos a figura dada a transformação de semelhança com o centro A, que translada a circunferência μ a circunferência x. Para isso tomamos sobre l um ponto arbitrário B, construímos os segmentos BA e BM, tracemos por K a reta KC // MB basta que intersectam com AB no ponto C e através de C tracemos l´// l. Seja que l´ corta a circunferência x nos pontos D e E. As retas AD e AE cortam a reta l nos pontos F e G que são os pontos procurados. Se os pontos D e E coincidem, então *l* faz contato com a circunferência μ. Se l´ não tem pontos comuns com a circunferência μ. Se o ponto A é infinitamente afastado, então no lugar do centro exterior temos de tomar o centro interior de semelhança das circunferências x e μ. Observamos que o segmento $\frac{AM}{AK} = \frac{AB}{AC}$, onde AC e quarto e proporcional aos demais segmentos, em seguida fazemos o processo inverso ou seja $\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AE}$ onde AE e o quarto e proporcional aos demais.

Problema 15. Sejam dados os centros M e N das circunferências m e v e seus raios. Construir os pontos de intersecção destas circunferências.

Demonstração: Sejam A sobre a circunferência m e B sobre a circunferência v. Podem ocorrer dois casos:

1) Um dos pontos A ou B está sobre a intersecção de m e v para verificar se isto ocorre construa sobre a semi-reta $\overrightarrow{NA}$ um ponto A´ tal que NA´≡ NB e sobre a semi-reta $\overrightarrow{MB}$ um ponto B´ tal que MB´≡ MA, se A´= A ou B´= B então esta é uma solução do problema.

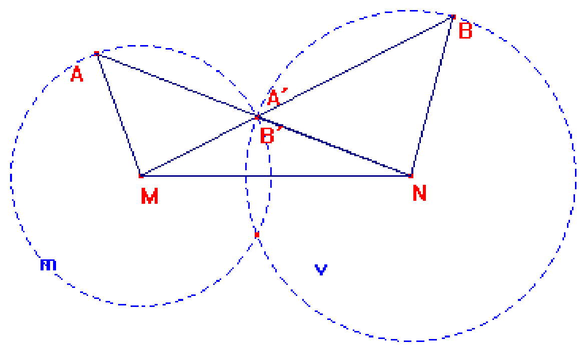


Figura 16. Caso em que A ou B esta sobre a circunferência m ou v.

Suponha, por exemplo, que A esteja na intersecção, então por A construa uma perpendicular a MN (problema 9). Seja G o ponto de intersecção de MN com esta perpendicular, construa um ponto A´ sobre a semi-reta $\overrightarrow{AG}$ tal que GA´≡ AG, então A´ é o segundo ponto de intersecção.

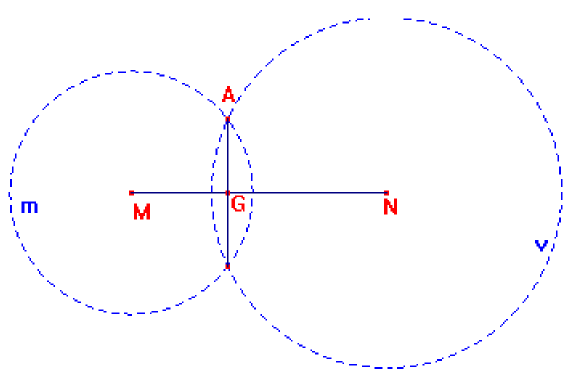


Figura 17. Caso quando A esta na intersecção.

Se A for na verdade um ponto de tangencia entre m e v então o ponto A estará sobre a reta MN.

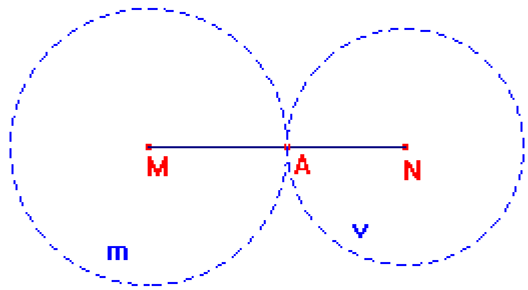


Figura 18. Caso quando as circunferências são tangentes.

2) Nem A nem B estão na intersecção. Neste caso construa C o ponto médio de AB (problema 6), construa MC e NC. Por A construa a perpendicular a MC (problema 9) e seja D o ponto de intersecção de MC com esta perpendicular.

Por B construa uma perpendicular a NC (problema 9) seja E o ponto de intersecção de NC com esta perpendicular, prolongando AD e BE seja F o ponto de intersecção destas duas retas.

Por F trace uma perpendicular a MN (problema 9) e seja G a intersecção de MN com esta perpendicular.

Afirmamos que os pontos procurados X e Y de intersecção de m e v são os pontos de intersecção da reta FG com a circunferência m (problema 14), isto se verifica , pois C é o centro de uma circunferência g passando por A e B então A está na intersecção de m e g e B está na intersecção de v e g.

MC e NC são os segmentos que, respectivamente ligam os centros de m e g e de v e g e a reta AD $\perp$ MC é a reta que passa pelos pontos de intersecção de m e g, denominamos eixo radical de m e g. Da mesma forma BE é o eixo radical de v e g.

Vamos utilizar, sem demonstração, que os três eixos radicais de três circunferências que se intersectam duas a duas se cruzam no mesmo ponto, então o ponto F de intersecção de AD e BE está sobre o eixo radical de m e v que é a reta F. Construídos então os pontos de intersecção de FG com qualquer uma das circunferências m ou v será a intersecção de m e v. cqd.

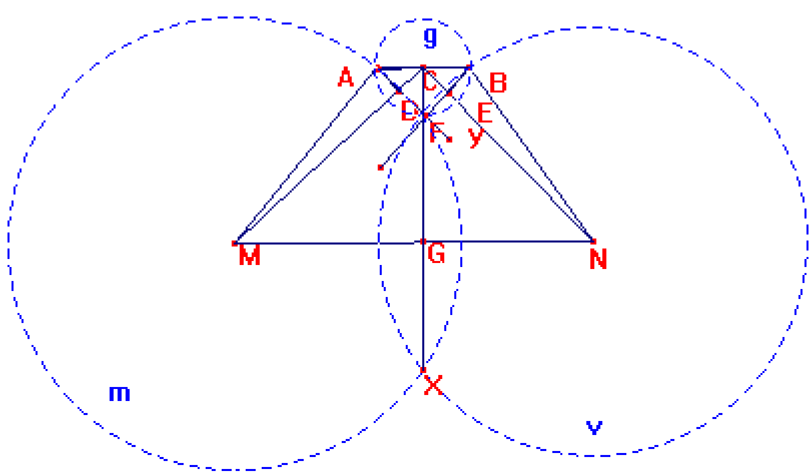


Figura 19. Caso quando nem A nem B estão na intersecção.

Então chegamos a conclusão que realmente é possível efetuar construções geométricas somente com régua.

Nesta seção examinamos as construções mediante uma régua, a condição de que no plano das construções esta traçada uma circunferência auxiliar e é conhecido seu centro. Como motivo disto, naturalmente, surge uma pergunta: é ou não possível, aproveitando somente uma régua, construir o centro de uma circunferência traçada, se este não esta dado? Esta construção se cumpre facilmente, se por exemplo no plano da circunferência dada esta traçado um paralelogramo ou alguma outra circunferência com seu centro. No entanto , no caso quando não dispomos destas ou outras figuras auxiliares, o problema desejado, é impossível de resolver.[5]

Conclusão

Este trabalho nos proporcionou ampliar o conhecimento em relação a geometria Euclidiana de uma forma mais precisa, também possibilitou compreender melhor determinados itens que muitas vezes não se percebia em aula, ou até mesmo nos livros. Com duas ferramentas tão simples o compasso e a régua.

Observamos que a geometria pode ser construída de várias maneiras, onde o produto final sempre será o mesmo.

Este trabalho, além de melhorar o entendimento da geometria, possibilitou tomar conhecimento de novas técnicas de construção geométricas, pois mesmo quem bem conhece geometria sabe que existem muitas maneiras de construção, sendo que este trabalho foi fruto de uma geometria inovadora que deu origem a novos ramos da pesquisa nos séculos XIX e XX.

Observamos com este trabalho que todas as afirmações em matemática particularmente em geometria mesmo que leve um bom tempo, precisa ser demonstrado para tornarem-se aceitas.

Podemos dizer que a necessidade e a curiosidade são as alavancas principais que incentivam um pesquisador, pois as duas por si só se completam.

Para finalizar podemos perceber que nada se cria por acaso e todo o novo é fruto do aperfeiçoamento de resultados já existentes, o que possibilita a criação de novos resultados, sendo que este é o principal objetivo da monografia. Onde o aluno após um determinado conhecimento possa pesquisar, ler e escrever a sua visão matemática de forma correta.

Referências Bibliográficas

[1] Leite;Paulo Ferreira, “construções com o compasso” (olimpíada brasileira de mtm), 1984.

[2] Boyer;Carl.B, “História da matemática” ,São Paulo, Edgard Blucher, 1974

[3] Wagner; Eduardo. “Construções geométricas”, SBM, 2000.

[4] Kostovski;A.N, “Construcciones Geométricas mediante um compasso”; editora Mir, Moscou, 1980.

[5}Smogorzhevski; A.N; “La regla em construcciones geométricas”; editora: Mir, Moscou, 1980.

[6] IEZZI, Gelsom; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática elementar 8. São Paulo: 7ª ed, editora Atual, 1999.

[7] MACHADO, Nilson José. “MATEMÁTICA: Aprendendo e Ensinando – Atividades de Geometria” . São Paulo: Editora Atual; 1996.

[8] www2.dm.ufscar.br/hp/hp853/hp8530001/hp8530001.htm 19/04/2004; “história da matemática”